Einfluß der Strahlung bei der Rutherfordstreuformel

Inaugural-Dissertation

zur Erlangung des Doktorgrades
der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität
zu Tübingen

vorgelegt von

EDGAR WEINMANN

aus Wangen im Allgäu

1 9 3 9

Buchdruckerei Albert Becht, Tübingen, Hirschgasse 16

Gedruckt mit Genehmigung der Naturwissenschaftlichen Fakultät
der Eberhard-Karls-Universität zu Tübingen.

Dekan: Prof. Dr. E. Hennig

Berichterstatter: Prof. Dr. Braunbek

Tag der mündlichen Prüfung: 30. Juni 1938

R. UNIV.
BIBLIOTHEEK
LEIDEN

Inhaltsverzeichnis

		Seite
Literaturverzeichnis		5
Einleitung		7
§ 1	Bezeichnungen	9
§ 2	Streuformel nach Mott	11
§ 3	Streuformeln nach Sommerfeld und Scherzer	18
§ 4	Streuformeln nach Bethe-Heitler und Sauter	27
§ 5	Streuformeln nach Bloch und Nordsieck	36
§ 6	Entwicklung der Bloch-Nordsieck'schen Streuformel nach Potenzen von α. Die Streuformel von Bethe-Heitler als erste Näherung	49
§ 7	Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons unter Berücksichtigung der Ausstrahlung	62
§ 8	Größenordnung von ω^*	74
Zusammenfassung		78

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41549608_0058

Literatur.

Abel, N. H., Oeuvres complètes II. Christiania 1881.

Bethe, H. und W. Heitler, On the Stopping of Fast Particles and on the Creation of Positive Electrons. Proc. Roy. Soc. London (A) 146, 83. 1934.

Bloch, F. und A. Nordsieck, Note on the Radiation Field of the Electron. Phys. Rev. 52, 54. 1937.

Dirac, P. A. M., The Quantum Theory of the Emission and Absorption of Radiation. Proc. Roy. Soc. London (A) 114, 243. 1927.

— —, The Quantum Theory of Dispersion. Proc. Roy. Soc. London (A) 114, 710. 1927.

Heitler, W., Ueber die bei sehr schnellen Stößen emittierte Strahlung. Ztschr. f. Physik, 84, 145. 1933.

Landé, A., Optik, Mechanik und Wellenmechanik, Handbuch der Physik (Geiger-Scheel) XX, Berlin 1928, S. 317.

Mott, N. F., On the Influence of radiative Forces on the Scattering of Electrons, Proc. Camb.Phil.Soc. Cambridge, 27, 255. 1931.

— —, The Scattering of Fast Electrons by Atomic Nuclei. Proc. Roy. Soc. London (A) 124, 425. 1929.

Pauli, W., Die allgemeinen Prinzipien der Wellenmechanik, Handbuch der Physik (Geiger-Scheel) XXIV/1, 2. Aufl. Berlin 1933, S. 83.

Sauter, Fr., Zur stationären Behandlung der elastischen Streuung sehr schneller Elektronen. ZS. f. Phys. 86, 818. 1933.

— —, Zur unrelativistischen Theorie des kontinuierlichen Röntgenspektrums. Annalen der Physik (V) 18, 486. 1933.

— —, Ueber die Bremsstrahlung schneller Elektronen. Annalen der Physik (V) 20, 404. 1934.

Schäfer, Cl., Einführung in die theoretische Physik, III, 2. Berlin und Leipzig 1937.

Scherzer, O., Ueber die Ausstrahlung bei der Bremsung von Protonen und schnellen Elektronen. Annalen der Physik (V) 13, 137. 1932.

Sommerfeld, A., Ueber die Beugung und Bremsung der Elektronen. Annalen der Physik (V) 11, 257. 1931.

Sommerfeld, A. und Maue, A. W., Verfahren zur näherungsweisen Anpassung einer Lösung der Schrödinger- an die Diracgleichung. Ann. d. Phys. (V) 22, 629. 1935.

Wentzel, G., Wellenmechanik der Stoß- und Strahlungsvorgänge, Handbuch der Physik XXIV/1. Berlin 1933, S. 695.

Whittaker, E. T., G. N. Watson, A Course of modern Analysis. 3. Aufl. Cambridge 1920.

Einleitung

Die Quantentheorie der Strahlung ist mit großem Erfolg auf die Emissions- und Absorptionsprozesse der Strahlung angewandt worden. Wendet man aber diese Methoden, die bei den Emissions- und Absorptionsprozessen zu so guten Ergebnissen führten, an, um allgemeinere Strahlungskorrektionen zu erhalten — z. B. bei der Streuung von Elektronen an Atomkernen —, so tritt eine ganz charakteristische Schwierigkeit auf. Diese Schwierigkeit tritt in den Formeln klar zutage, die Mott[1]), Sommerfeld[2]), Scherzer[3]), Sauter[4]) und Bethe-Heitler[5]) angeben für die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron am Coulombfeld eines Kernes gestreut wird, während gleichzeitig ein einzelnes Lichtquant ausgesandt wird. Liegt die Kreisfrequenz des ausgesandten Lichtquantes zwischen ω und $\omega + d\omega$, so ist diese Wahrscheinlichkeit proportional $\frac{d\omega}{\omega}$ ganz unabhängig vom Streuwinkel. Die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron unter Aussendung irgendeines Lichtquantes gestreut wird, erhält man durch Integration über alle ω. Sie wird daher logarithmisch unendlich. Bloch und Nordsieck[6]) gelang es nun, diese Singularität zu beseitigen, indem sie berücksichtigten, daß nicht bloß ein einzelnes Lichtquant beim Stoß eines Elektrons ausgesandt wird, sondern unendlich viele Lichtquanten, deren Häufungsstelle bei $\omega = 0$ liegt.

Das Ziel der vorliegenden Arbeit war, 1. die Formeln von Mott, Sommerfeld, Scherzer, Sauter, Bethe-Heitler und Bloch-Nordsieck zu vergleichen, 2. im Anschluß an die Methode von Bloch und Nordsieck die Formel für den gesamten Wirkungsquerschnitt unter Berücksichtigung der Strahlung abzuleiten.

1) N. F. Mott, Proc. Camb. Phil. Soc. 27 (1931) S. 255 ff.
2) A. Sommerfeld, Ann. d. Phys. 11 (1931) 257 ff.
3) O. Scherzer, Ann. d. Phys. 13 (1932) 137 ff.
4) Fr. Sauter, Ann. d. Phys. (V) 18 (1933) 490 ff.
5) H. Bethe—W. Heitler, Proc. Roy. Soc. (A) 146 (1934) 83 ff.
6) F. Bloch—A. Nordsieck, Phys. Rev. 52 (1937) 54 ff.

Es ergibt sich, daß die Formeln von Mott, Sommerfeld, Scherzer, Sauter und Bethe-Heitler auf dieselbe Form gebracht werden können, während sich die Formel von Bloch und Nordsieck nach $\alpha = e^2/\hbar\, c = 1/137$ entwickeln läßt, wobei das lineare Glied dieser Reihe mit den früheren Formeln übereinstimmt.

Da die Methode von Bloch und Nordsieck die sogenannte Ultrarotschwierigkeit vermeidet, gelingt es auch unter Verwendung dieser Methode, die Korrektion der Rutherfordschen, ohne Strahlung berechneten Streuformel, die durch die Ausstrahlung bedingt ist, formelmäßig auszudrücken.

§ 1. Bezeichnungen.

$\mathfrak{v}$, $\mathfrak{p}$, E Geschwindigkeitsvektor, Impulsvektor, Energie des ankommenden Elektrons.

$\mathfrak{v}'$, $\mathfrak{p}'$, E' Geschwindigkeitsvektor, Impulsvektor, Energie des gestreuten Elektrons.

$\mathfrak{k}_s$ Ausbreitungsvektor des emittierten Lichtquants; Betrag k_s.

$\omega_s = c\, k_s$ Kreisfrequenz des in der Richtung $\mathfrak{k}_s$ ausgesandten Lichtquants.

ω Kreisfrequenz ohne Rücksicht auf die Richtung des Lichtquants.

$\omega_g = \frac{E}{\hbar}$ Grenzfrequenz, $2\pi\hbar = h$ Plancksche Konstante.

$\omega^* =$ Grenzfrequenz des „virtuellen" Frequenzspektrums.

p, p' Beträge der Impulse.

Θ, Θ' Winkel zwischen der Impulsrichtung $\mathfrak{p}$, $\mathfrak{p}'$ und der Richtung des Lichtquants $\mathfrak{k}_s$.

$\vartheta = \sphericalangle\,(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$.

Ψ Winkel zwischen der $(\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_s)$ Ebene und der $(\mathfrak{p}', \mathfrak{k}_s)$ Ebene.

χ Winkel zwischen der $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ Ebene und der $(\mathfrak{p}, \mathfrak{k}_s)$ Ebene.

χ' Winkel zwischen der $(\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ Ebene und der $(\mathfrak{p}', \mathfrak{k}_s)$ Ebene.

$\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ bzw. $\sin\Theta\, d\Theta\, d\chi$ Raumwinkelelemente für das gestreute Elektron bzw. das Lichtquant (vgl. Fig. 1, S. 79).

$\mathfrak{A}$ Vektorpotential des Strahlungsfeldes.

$\mathfrak{e}_{s\lambda}$ Einheitsvektor in der Polarisationsrichtung λ (Richtung des elektrischen Feldvektors); $(\lambda = 1,2)$.

e, Ze Ladung von stoßendem Elektron, Kern.

m Masse des Elektrons; m_0 Ruhmasse.

$\vec{\alpha}$ Dirac'scher Matrixoperator.

$V = -e(\vec{\alpha}\,\mathfrak{A})$ Wechselwirkung mit der Strahlung.

$U = \frac{Ze^2}{r}$ Coulombpotential.

H = Hamiltonfunktion des Systems Materie + Strahlungsfeld.

H^{Mat} = Hamiltonfunktion der Materie.

H^{Str} = Hamiltonfunktion des Strahlungsfeldes.

$N_{s\lambda}$ bedeutet N Lichtquanten des Ausbreitungsvektors $\mathfrak{k}_s$ und Polarisationszustandes λ ($\lambda = 1,2$).

G Volumen des Periodizitätsbereiches der Strahlung.

$\psi(\mathfrak{v}, 0)$ bzw. $\psi(\mathfrak{v}', 0)$ bedeuten Wellenfunktionen einer ebenen Welle, die einem Elektron der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{v}'$ zugeordnet sind.

$\psi(\mathfrak{v}, N_{s\lambda})$, $\psi(\mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ haben dieselbe Bedeutung, doch sind dabei jeweils noch $N_{s\lambda}$ Lichtquanten vorhanden.

$\psi(r, \vartheta, \varphi, 0)$ bzw. $\psi(r, \vartheta, \varphi, \ldots N_{s\lambda}, \ldots)$ beschreibt die Streuung eines Elektrons an einem Kern unter gleichzeitiger Aussendung von o bzw. $\ldots, N_{s\lambda}, \ldots$ Lichtquanten.

r, ϑ, φ Polarkoordinaten des Elektrons, r vom Kern aus gemessen.

$d\Phi$ differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung des Elektrons.

$k = p/\hbar$ bzw. $k' = p'/\hbar$ Wellenzahl des einfallenden bzw. austretenden Elektrons.

$$n = \frac{Z}{i\,a_1\,k}; \quad n' = \frac{Z}{i\,a_1\,k'}; \quad a_1 = \frac{\hbar^2}{m\,e^2}; \quad \delta = \frac{Z}{a_1\,k^2}.$$

$\alpha = e^2/\hbar c = 1/137$ = Sommerfeld'sche Feinstrukturkonstante.

$F(a, b, c, x) = 1 + \frac{a\,b}{c}\,x + \frac{a(a+1)\,b(b+1)}{c(c+1)}\,\frac{x^2}{2!} + \ldots$ Gauß'sche hypergeometrische Funktion.

§ 2. Streuformel nach Mott.

1. Die Problemstellung bei Mott[1]) ist folgende: Ein Strom von Elektronen (e = Ladung, m = Masse) der Intensität 1 und der Geschwindigkeit v trifft auf einen Kern der Ladung Ze (Z = Kernladungszahl). Intensität 1 will besagen, daß im Mittel ein Elektron in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit tritt. Die Zahl der Elektronen, die in der Zeiteinheit in den Winkelbereich $\sin\vartheta d\vartheta\varphi$ gestreut werden, ist, sofern die Strahlung außer Acht gelassen, d. h. ein elastischer Stoß betrachtet wird, gegeben durch die Rutherfordstreuformel:

$$(2,1) \qquad d\Phi_0 = \left(\frac{Ze^2}{2mv^2}\right)^2 \frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{\sin^4\vartheta/_2}$$

und alle Elektronen besitzen nach dem Stoß ihre Anfangsenergie und ihre Anfangsgeschwindigkeit. In Wirklichkeit werden aber auch Elektronen gestreut, nachdem sie auf Grund der Strahlungskräfte einen Teil ihrer Energie als Licht abgegeben haben. Mott berechnet nun die Zahl der Elektronen, die in einen Raumwinkel $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ gestreut werden, nachdem ein Lichtquant mit einer Kreisfrequenz zwischen ω und $\omega + d\omega$ ausgesandt worden ist und das Elektron von seiner Anfangsgeschwindigkeit v auf $v' = \sqrt{v^2 - \frac{2\hbar\omega}{m}}$ abgebremst wurde. Die höchstmöglich ausgesandte Frequenz ist gegeben durch die Beziehung:

$$(2,2) \qquad \omega_g = \frac{m}{2} v^2 \Big/ \hbar$$

($h = 2\pi\hbar$ Planck'sches Wirkungsquantum).

2. Im Folgenden wird die Mott'sche Darstellung des Strahlungsfeldes kurz besprochen und mit der Darstellung, die Bethe-Heitler (vgl. § 4) und Bloch-Nordsieck (vgl. § 5 ff.) benutzen, verglichen. Außerdem soll die Mott'sche Methode in kurzen Zügen skizziert werden. Mott beschreibt im Anschluß an Dirac[2]) den Zustand des Strahlungsfeldes zu irgend einer Zeit durch $N_{s\lambda}$, wo $N_{s\lambda}$ die Anzahl der Lichtquanten der Sorte s, λ

1) N. F. Mott aaO 255 ff.

2) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 114 (1927) 243 ff.

im Periodizitätsbereich G angibt. Der Summationsindex s charakterisiert die Richtung und die Kreisfrequenz ω_s der verschiedenen Wellen mit dem Ausbreitungsvektor $\vec{k}_s$ ($c\,k_s = \omega_s$, c = Lichtgeschwindigkeit). λ gibt den Zustand der Polarisation an ($\lambda = 1,2$). $\Theta_{s\lambda}$ ist die zu $N_{s\lambda}$ konjugierte Variable. $\Theta_{s\lambda}$ und $N_{s\lambda}$ sind keine gewöhnlichen Zahlen, sondern im Sinne der Dirac'schen Theorie Operatoren. Die Hamiltonfunktion H des Gesamtsystems (Materie + Strahlungsfeld) läßt sich wie folgt darstellen [1]):

$$(2,3) \qquad H = H^{Mat} + H^{Str} + V \cdot$$

H^{Mat} enthält die kinet. Energien und die Coulombpotentiale von Elektron und Kern.

H^{Str} ist die Energie des Strahlungsfeldes, die in verschiedenen Formen dargestellt werden kann:

$$(2,4) \qquad H^{Str} = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, dV\ ,$$

wo $\mathfrak{E}$, $\mathfrak{H}$ die elektr. bzw. magn. Feldvektoren des Strahlungsfeldes sind. Mott benützt die der Gleichung (2,4) entsprechende Quantendarstellung:

$$(2,4a) \qquad H^{Str} = \sum_{s\lambda} (\hbar\omega_s)\, N_{s\lambda} \cdot$$

V stellt die Kopplung zwischen Materie und Strahlungsfeld dar und ist gegeben im relativistischen Fall im wesentlichen durch

$$(2,5) \qquad V = -e\,(\vec{\alpha}\,\mathfrak{A})\ ,$$

wobei $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential des Strahlungsfeldes darstellt. $\vec{\alpha}$ ist der Dirac'sche Matrixvektor, der physikalisch als Geschwindigkeit des Elektrons dividiert durch die Lichtgeschwindigkeit c gedeutet werden kann. Im nichtrelativistischen Fall, und diesen setzt Mott voraus, ergibt sich als einfacher Ausdruck, wenn man die Koppelung als kleine Störung auffaßt und höhere Glieder in $\mathfrak{A}$ vernachlässigt:

$$(2,5a) \qquad V = -\frac{e}{cm}\, p\mathfrak{A}\ ,$$

1) G. Wentzel, Handb. d. Phys. 2. Aufl. XXIV/1, 740 ff.

wobei p den Impuls des Elektrons darstellt. In seinen Ausführungen benützt Mott die (2,5 a) entsprechende Quantendarstellung:

$$V = \sum_{s\lambda} v(s,\lambda) \left\{ N_{s\lambda}^{1/2} e^{\frac{i\Theta_{s\lambda}}{\hbar}} + (N_{s\lambda}+1)^{1/2} e^{-\frac{i\Theta_{s\lambda}}{\hbar}} \right\}, \tag{2,5b}$$

wobei der Operator $v(s, \lambda)$ sich darstellen läßt in der Gestalt:

$$v(s\lambda) = -\frac{e}{m}\left(\frac{h}{G\omega_s}\right)^{1/2} p\, e_{s\lambda} \cdot \tag{2,6}$$

$e_{s\lambda}$ ist der Einheitsvektor in der Richtung des elektrischen Feldvektors, λ charakterisiert den Zustand der Polarisation. Um die Zuordnung der Gleichungen (2,5a) und (2,5b) zu zeigen, ist es nötig, das Vektorpotential $\mathfrak{A}$ des Strahlungsfeldes durch die $N_{s\lambda}$ und $\Theta_{s\lambda}$ auszudrücken [1]). Zunächst betrachtet man unter vorübergehender Unterdrückung des Index λ nur das k-te Strahlenbündel mit der Besetzungszahl N_k und der zu N_k konjug. Variablen Θ_k und berechnet das von ihm erzeugte Vektorpotential $\mathfrak{A}_k$. $\mathfrak{A}$ erhält man dann durch Superposition aller $\mathfrak{A}_k$; die von dem genannten Strahlenbündel im Periodizitätsbereich G erzeugte mittlere Energiedichte ist nach (2,4a)

$$\frac{N_k \hbar \omega_k}{G}. \tag{2,7}$$

Andererseits ist nach (2,4) die mittlere Energiedichte anzugeben mit

$$\frac{1}{8\pi}\left(\overline{\mathfrak{E}_k^2} + \overline{\mathfrak{H}_k^2}\right) = \frac{1}{4\pi}\left(\overline{\mathfrak{E}_k^2}\right) \tag{2,8}$$

und wegen

$$\mathfrak{E}_k = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}_k}{c} \tag{2,9}$$

ist:

$$\frac{1}{4\pi}\left(\overline{\mathfrak{E}_k^2}\right) = \frac{1}{4\pi c^2}\left(\overline{\dot{\mathfrak{A}}_k}\right)^2 = \frac{1}{4\pi}\frac{\omega_k^2}{c^2}\overline{\mathfrak{A}_k^2} \tag{2,10}$$

1) A. Landé, Handbuch d. Phys. XX, 404 f.

Setzt man die beiden Dichten, wie sie durch (2,7) und (2,10) gegeben sind, gleich, so erhält man:

$$\overline{\mathfrak{A}_k^2} = \frac{c^2 4\pi \hbar}{\omega_k} \cdot \frac{N_k}{G} \cdot \tag{2,11}$$

Setzt man nun endlich noch $\mathfrak{A}_k$ periodisch mit dem Phasenfaktor $\cos\left(\frac{\Theta_k}{\hbar}\right)$ an, so erhält man aus (2,11):

$$\left|\mathfrak{A}_k\right| = \sqrt{N_k}\ \cos\left(\frac{\Theta_k}{\hbar}\right) \cdot 2\, c \sqrt{\frac{\hbar}{G\omega_k}} \tag{2,12}$$

Gl. (2,12) läßt sich noch symmetrischer schreiben, denn es ist:

$$2 \cdot \sqrt{N_k} \cos\left(\frac{\Theta_k}{\hbar}\right) = \sqrt{N_k}\, e^{+\frac{i\Theta_k}{\hbar}} + e^{-\frac{i\Theta_k}{\hbar}} \sqrt{N_k}. \tag{2,13}$$

Mit (2,13) und (2,12) ergibt sich dann aus (2,5a):

$$V = -\frac{e}{mc}(p\mathfrak{A}) = -\frac{e}{m} p \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{G\omega_k}}\, \mathfrak{e}_k \left(\sqrt{N_k}\, e^{\frac{i\Theta_k}{\hbar}} + e^{-\frac{i\Theta_k}{\hbar}} \sqrt{N_k}\right). \tag{2,14}$$

$\mathfrak{e}_k$ ist der Einheitsvektor der elektrischen Feldstärke. $\mathfrak{A}_k$ hat dieselbe Richtung wie der elektrische Vektor $\mathfrak{E}_k = -\frac{\dot{\mathfrak{A}}_k}{c}$; daher ist auch:

$$\mathfrak{A}_k = \left|\mathfrak{A}_k\right| \mathfrak{e}_k .$$

Berücksichtigt man, daß [1])

$$e^{-\frac{i\Theta_k}{\hbar}} N_k^{1/2} = (N_k + 1)^{1/2}\, e^{-\frac{i\Theta_k}{\hbar}},$$

so erhält man statt (2,14):

$$V = -\frac{e}{m} p \sum_k \sqrt{\frac{\hbar}{G\omega_k}}\, \mathfrak{e}_k \left\{ N_k^{1/2} e^{+\frac{i\Theta_k}{\hbar}} + (N_k + 1)^{1/2} e^{-\frac{i\Theta_k}{\hbar}} \right\}. \tag{2,15}$$

Ausdruck (2,15) ist identisch mit (2,5b) unter Berücksichtigung

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 114 (1927) 251 ff.

von (2,6). Dieselbe Darstellung des Vektorpotentials findet sich auch bei Dirac [1]).

Die Wellenfunktion $\psi\,(r, \ldots N_{s\lambda} \ldots)$ soll das System beschreiben, wobei r der Ortsvektor des Elektrons ist und der Kern sich im Ursprung befindet. Daher muß die Wellengleichung gelten:

(2,16) $\qquad (H—E)\ \psi\ (r, \ldots N_{s\lambda} \ldots) = o.$

$\psi\ (r, \vartheta, \varphi)$ sei eine Lösung der folgenden Gleichung:

(2,17) $\qquad (H^{Mat.}-E)\ \psi\ (r, \vartheta, \varphi) = o.$

$(E = \frac{m}{2} v^2 =$ kinetische Energie des Elektrons)

mit der asymptotischen Form:

$$\psi\ (r, \vartheta, \varphi) \sim e^{\frac{imvz}{\hbar}} + \frac{e^{\frac{imvr}{\hbar}}}{r} f\ (\vartheta, \varphi).$$

Hierbei ist angenommen, daß die Richtung der z-Achse die anfängliche Bewegungsrichtung der Elektronen ist; r, ϑ, φ sind die Polarkoordinaten des Elektrons. Mott setzt nun die Wellenfunktion $\psi\ (r, \vartheta, \varphi, \ldots N_{s\lambda} \ldots)$ in der Form an:

(2,18) $\psi\ (r, \vartheta, \varphi, \ldots N_{s\lambda} \ldots) = \{\psi\ (r, \vartheta, \varphi) + \psi\ (r, \vartheta, \varphi; o)\}\, \delta_0 (N)$

$$+ \Sigma\ (\psi\ (r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda} \ldots)\, \delta_{st} \ldots (N),$$

wobei:

$$\delta_{st} \ldots (N) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } N_{s\lambda} = N_{t\lambda} = \ldots = 1 \text{ und alle andern } N = O \\ O \text{ in jedem andern Fall,} \end{cases}$$

$$\delta_0\ (N) = \begin{cases} 1, \text{ wenn alle } N = O \text{ sind} \\ O \text{ in jedem andern Fall.} \end{cases}$$

$\psi\ (r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda} \ldots)$ habe die asymptotische Form:

$$(2,19) \qquad \psi\ (r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda} \ldots) \sim \frac{e^{ik'\ (1_{s\lambda}, 1_{t\lambda}, \ldots)\ r}}{r} u_{st} \ldots (\vartheta, \varphi),$$

wobei $\frac{2\pi}{k'\ (1_{s\lambda}, 1_{t\lambda} \ldots)} = \lambda$ die Wellenlänge des Elektrons bedeutet, das ein s,λ-Lichtquant, ein t,λ-Lichtquant usf. ausgesandt hat. Wenn sich eine Wellenfunktion dieser Form berechnen läßt, dann ist

---

1) P. A. M. Dirac, Proc. Roy. Soc. (A) 114 (1927) 710 ff.

die Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron in den Raumwinkel $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ gestreut wird, nachdem es ein Lichtquant der Sorte s, λ, ein Lichtquant der Sorte t, λ ausgesandt hat usf. gegeben durch [1]):

$$(2{,}20)\quad \left| \frac{k'}{k}\,(1_{s\lambda},\, 1_{t\lambda}\,\cdot\cdot) \right|\, u_{st}\,\cdot\cdot\,(\vartheta,\varphi) \Big|^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Näherungsweise ergibt sich nunmehr $\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda})$ sukzessive aus den nachstehenden Gleichungen (2,21), die man durch Einsetzen von (2,18) in (2,16) erhält.

$$a)\ (H^{Mat} - E)\,\psi\,(r, \vartheta, \varphi, o) + \sum_{s\lambda} v\,(s,\lambda)\,\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}) = o$$

$$(2{,}21)\quad b)\ (H^{Mat} - E'_s)\,\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}) + v\,(s,\lambda)\,(\psi\,(r, \vartheta, \varphi, o) + \psi\,(r, \vartheta, \varphi)) + 2^{1/2} \sum_{t\lambda} v\,(t,\lambda)\,\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda}) = o$$

$$c)\ (H^{Mat} - E'_{st})\,\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda}) + v\,(s,\lambda)\,(\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{t\lambda}) + v\,(t,\lambda)\,\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}) = o$$

Hierbei ist $v\,(s,\lambda)$ nach (2,6) bestimmt. Ferner ist:

$$E'_s = E - \hbar\,\omega_s;\quad E'_{st} = E - \hbar\,(\omega_s + \omega_t);$$

E'_{st} ist die Energie eines Elektrons nach dem Stoß. Die bei E' angefügten Indices s, t deuten darauf hin, daß das Elektron dabei ein Lichtquant der Sorte s, λ und t, λ angeregt hat.

Nunmehr wird V und damit $v\,(s,\lambda)$ d. h. die Kopplung zwischen Materie und Strahlungsfeld als kleine Störung betrachtet, $\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda})$ als klein von 1. Ordnung, $\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda})$ als klein von 2. Ordnung angenommen usf., d. h. es wird die Möglichkeit, daß von einem Elektron mehr als ein Lichtquant erzeugt wird, vernachlässigt. Streicht man nun Größen, die von 2. Ordnung klein sind, so erhält man aus (2,21):

$$(2{,}22)\quad (H^{Mat} - E'_s)\,\psi\,(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}) + v\,(s,\lambda)\,\psi\,(r, \vartheta, \varphi) = 0.$$

Gl. (2,22) läßt sich mit Hilfe einer Green'schen Funktion exakt lösen und man erhält für (2,20) unter der Bedingung $Z\alpha \cdot \frac{c}{v} \ll 1$ den Ausdruck:

1) Vgl. u. S. 44 ff.

$$(2{,}23)\quad d\Phi_\lambda = \frac{8}{3}\,\frac{Z^2\,e^6}{h\,c^3}\cdot\frac{p'}{p}\cdot\frac{d\omega}{\omega}\cdot\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{(p^2+p'^2-2\,p\,p'\cos\vartheta)}$$

($p = mv$; $p' = mv'$, Impulse vor bzw. nach dem Stoß).

Ausdruck (2,23) hat die Dimension einer Fläche und stellt den differentiellen Wirkungsquerschnitt dafür dar, daß ein Elektron von der Geschwindigkeit v auf v' abgebremst und nach dem Raumwinkelelement $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ gestreut wird, während gleichzeitig ein Lichtquant des Polarisationszustandes λ mit einer Frequenz zwischen ω und $\omega + d\omega$ in irgend einer Richtung ausgesandt wird. Für $\omega \to$ o, d. h. für $p' \to p$ ergibt sich aus (2,23):

$$(2{,}24)\quad d\Phi_\lambda = \frac{2}{3}\,\frac{Z^2\,e^6}{h\,c^3\,p^2}\cdot\frac{d\omega}{\omega}\,\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{\sin^2\vartheta/_2}$$

Den differentiellen Wirkungsquerschnitt $d\Phi = \sum_{\lambda=1}^{2} d\Phi_\lambda$ erhält man einfach durch Verdoppeln der Ausdrücke (2,23) bzw. (2,24), da beide Polarisationszustände gleichberechtigt sind, d. h.:

$$(2{,}25)\quad d\Phi = \sum_{\lambda=1}^{2} d\Phi_\lambda = 2\,d\Phi_\lambda$$

(vgl. hiezu § 4, S. 34).

2. Die Gültigkeit der Formeln (2,23) und (2,24) ist wegen der Vernachlässigung der Glieder 2. Ordnung beschränkt. In der Grenze $\omega \to 0$ würde nach ihnen der Wirkungsquerschnitt unendlich werden wegen des Faktors $\frac{d\omega}{\omega}$. Auch die Gesamtzahl der in ein Raumwinkelelement $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ gestreuten Elektronen, die sich durch Integration des Ausdrucks (2,23) bzw. (2,24) von o bis ω_g ergeben würde, würde logarithmisch unendlich werden und zwar für jeden Streuwinkel ϑ, was den Tatsachen offensichtlich nicht entspricht. Mott bezeichnet als Ursache dieses Unendlichwerdens die Vernachlässigung, die bei der Methode der sukzessiven Näherung angewandt wurde. Dabei wird nämlich $\varphi(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda})$ in eine Reihe nach aufsteigenden Potenzen von $\frac{1}{\omega_s}$ entwickelt und außerdem ist, wie Mott ausführt, $v(s, \lambda)\,\psi(r, \vartheta, \varphi)$

in (2,21) nicht von höherer Größenordnung als $\sum_t (v(t, \lambda$ $\psi(r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda}))$, wenn nicht:

(2,26) $\frac{\omega_g}{\omega} \frac{Z^2 e^2}{\hbar v} \alpha \beta^2 \ll 1; \left(\beta = \frac{v}{c}\right)$.

Aus (2,26) folgt dann, daß für kleiner werdendes ω die Wahrscheinlichkeit, daß von einem Elektron zwei und mehr Lichtquanten angeregt werden, merklich wächst. Daß man von dieser Tatsache ausgehend das Unendlichwerden des Wirkungsquerschnittes verhindern kann, wird im Späteren gezeigt.

§ 3. Streuformel nach Sommerfeld und Scherzer.

1. Scherzer [1]) betrachtet zunächst in direktem Anschluß an eine ausführliche Arbeit von Sommerfeld [2]) folgende Problemstellung: Ein Elektronenstrom wird an einem Kern gestreut, wobei ein Lichtquant emittiert wird. Gefragt wird nach der Wahrscheinlichkeit, daß das Lichtquant mit bestimmter Polarisation einem bestimmten Raumwinkelbereich $\sin\Theta\, d\Theta\, d\chi$ und einem Frequenzbereich $d\omega$ angehört. Irgend welche Aussage über die Austrittsrichtung des Elektrons war nicht verlangt. Im zweiten Teil seiner Arbeit geht dann Scherzer darüber hinaus und berechnet unter Anwendung der Methode der Dirac'schen Strahlungstheorie [3]) die Wahrscheinlichkeit für folgenden Prozeß: Eine unendlich große Anzahl von Elektronen fliegt an einem Kern vorbei. In großer Entfernung vor dem Kern kommt pro cm² u. sec 1 Elektron. Ein Lichtquant eines bestimmten Polarisationszustandes λ, einer Kreisfrequenz zwischen ω_s und $\omega_s + d\omega_s$ mit einer Fortschreitungsrichtung aus dem Raumwinkelelement $\sin\Theta\, d\Theta\, d\chi$ um die Richtung Θ und χ wird emittiert, während gleichzeitig ein Elektron auf die Geschwindigkeit $v' = \sqrt{v^2 - \frac{2\hbar\omega_s}{m}}$ abgebremst und in das Raumwinkelelement $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$ um die Richtung ϑ, φ

1) O. Scherzer aaO.

2) A. Sommerfeld aaO.

3) P.A.M. Dirac aaO S. 243 und S. 710.

abgelenkt wird. Ueber die Bedeutung des Winkels siehe Fig. 1 S. 79.

2. $d\Phi_{s\lambda}$ stelle den differentiellen Wirkungsquerschnitt dar und gebe die Wahrscheinlichkeit für diesen elementaren Prozeß an. Nach Summation über die Polarisationszustände λ und nach Integration über die Richtungen von $\mathfrak{k}_s$ erhält dann Scherzer die Gesamtwahrscheinlichkeit für den Austritt eines Elektrons mit einer Energie zwischen $\frac{m}{2}v'^2$ und $\frac{m}{2}v'^2 + dE$ in ein Raumwinkelement $\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi$, während gleichzeitig ein Lichtquant emittiert wird mit einer Kreisfrequenz zwischen ω und $\omega + d\omega$, wobei ω gegeben ist durch:

$$(3,1)\quad \hbar\omega = \frac{m}{2}(v^2 - v'^2).$$

Diese Gesamtwahrscheinlichkeit läßt sich darstellen in der Form:

$$(3,2)\quad d\Phi = \frac{2C}{3}(|M_x^2| + |M_y^2| + |M_z^2|)\, d\omega \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi.$$

$d\Phi$ hat wie $d\Phi_{s\lambda}$ die Dimension einer Fläche und stellt den differentiellen Wirkungsquerschnitt für den eben beschriebenen Prozeß dar. In (3,2) bedeuten:

$$M_x = -B\left\{(k - k'(1_s)\cos\vartheta)\, F(1+n, 1+n', 1, x) + 2kn\sin^2\vartheta/_2\, F(1+n, 1+n', 2, x)\right\}$$

$$(3,3)\quad \left.\begin{matrix} M_y \\ M_z \end{matrix}\right\} = B\sin\vartheta \left\{\begin{matrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{matrix}\right\}\left(kn + k'(1_s)\right) F(1+n, 2+n', 2, x)$$

Wegen $k'(1_s)$ vergleiche (2,19). Aber da Scherzer nur den Fall behandelt, daß ein Lichtquant ausgesandt wird, kann man statt $k'(1_s)$ einfach k' schreiben, da Verwechslungen ausgeschlossen sind. In (3,3) bedeuten außerdem:

$$(3,4)\quad B = \frac{16\pi k n e^{-i\pi n}}{(k^2-k'^2)^2 (k-k')^2}\left(\frac{k+k'}{k-k'}\right)^{n+n'};\quad x = \frac{-4kk'}{(k-k')^2}\sin^2\vartheta/_2;$$

$$C = \frac{(2\pi)^6 m^2\omega^3 e^2}{h^3 c^3}\,\bar{N}^2\,\bar{N}'^2\,\frac{v'}{v}.$$

Es ist:

$$\bar{N} = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{in}{1-e^{-2\pi i n}};\quad \bar{N}' = \frac{1}{(2\pi)^2}\frac{in'}{1-e^{-2\pi i n'}};\quad k = p/\hbar;$$

$k' = p'/\hbar$; $n = Z/ia_1 k$; $n' = Z/ia_1 k'$; $a_1 = \hbar^2/me^2$.

a) Im Falle ‚daß $v/c \gg Z\alpha$ d. h. n und $n' \ll 1$ ist, erhält man durch Einsetzen der Grenzwerte der hypergeometrischen Funktionen F in (3,3) für $n \to 0$ und $n' \to 0$:

$$(3,5)\quad d\Phi = \frac{8\, e^2\, h}{3\, c^3\, m^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\frac{v^2 \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{(v^2+v'^2-2\,v\,v'\cos\vartheta)}\,\frac{n^4}{(e^{2\pi i n}-1)\,(1-e^{-2\pi i n'})}$$

Da n und $n' \ll 1$ (vgl. $v/c \gg Z\,\alpha$) ist, benutzt man die Entwicklung:

$$\frac{n^4}{(e^{2\pi i n}-1)\,(1-e^{-2\pi i n'})} \approx \frac{n^3}{(2\pi i)\,(2\pi i n')} \approx \frac{Z^2 e^4}{v^2 h^2}\,\frac{v'}{v}$$

und erhält:

$$(3,6)\quad d\Phi = \frac{8}{3}\,\frac{Z^2 e^6}{h\, c^3}\,\frac{v'}{v}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{(p^2+p'^2-2\,p\,p'\cos\vartheta)}$$

Diese Formel stimmt mit der von Mott erhaltenen Formel (2,25) bis auf einen Faktor 2 überein, der aus der Scherzer'schen Theorie heraus nicht erklärt werden konnte.

b) Im Falle, daß v beliebig ist, kann man immer noch einfache Grenzwerte für die hypergeometrischen Funktionen F finden in der Grenze $\varepsilon = k - k' \to 0$ (d. h. $n - n' \to 0$, wobei n und n' nicht gegen Null zu gehen brauchen). Das Einsetzen dieser Grenzwerte in (3,3) liefert (3,7):

$$(3,7)\quad d\Phi = \frac{2}{3}\,\frac{Z^2\, e^6}{c^3\, h\, p^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\frac{\sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi}{\sin^2\vartheta/2}$$

3. Das unter b) auf S. 20 beschriebene Verfahren Scherzers soll im Folgenden noch weiter durchgeführt werden insofern, als nicht nur die Grenzwerte der hypergeometrischen Funktionen für $\varepsilon \to 0$ sondern auch das 1. Glied einer Reihenentwicklung dieser Funktionen nach ε berücksichtigt werden. Ausgangspunkt für die nachfolgenden Betrachtungen sind die Formeln (3,3) (Formel 3.2 bei Scherzer S. 143). Benötigt werden außerdem zwei Formeln über hypergeometrische Reihen [1] [2].

1) Lond. Proc. Math. Soc. (2) VI (1908) 141 ff.

2) Whittaker, Watson, Modern Analysis, 4. Aufl. § 14, 51.

Für $|z| > 1$ gilt, wenn $\Gamma(x) = (x-1)!$ die Gammafunktion darstellt:

$$(3,8)\quad F(\alpha_1, \alpha_2, \varrho, z) = \frac{\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\alpha_2-\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_2)\,\Gamma(\varrho-\alpha_1)}(-z)^{-\alpha_1} F\left(\alpha_1, 1+\alpha_1-\varrho, 1+\alpha_1-\alpha_2; \frac{1}{z}\right)$$
$$+\frac{\Gamma(\varrho)\,\Gamma(\alpha_1-\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\,\Gamma(\varrho-\alpha_2)}(-z)^{-\alpha_2} F\left(\alpha_2, 1+\alpha_2-\varrho, 1+\alpha_2-\alpha_1; \frac{1}{z}\right)$$

Für $|z| < 1$ gilt:

$$(3,9)\quad F(a, b, c, z) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(a)\,\Gamma(b)}\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(a+n)\,\Gamma(b+n)}{\Gamma(c+n)\,n!} z^n\right)$$

Gl. (3,8) und Gl. (3,9) sind anzuwenden auf (3,3), d. h. auf die hypergeometrischen Reihen, die in (3,3) vorkommen:

$$(3,10)\quad F\left(1+n, 1+n', 1, -\frac{s}{\varepsilon^2}\right),$$

$$(3,11)\quad n \cdot F\left(1+n, 1+n', 2, -\frac{s}{\varepsilon^2}\right) + F\left(1+n, 1+n', 1, -\frac{s}{\varepsilon^2}\right),$$

$$(3,12)\quad F\left(1+n, 2+n', 2, -\frac{s}{\varepsilon^2}\right),$$

wobei: $s = 4\,k\,k'\sin^2\vartheta/2$; $\varepsilon = k-k'$; eine Verwechslung mit dem Summationsindex s, der die Richtung des ausgesandten Lichtquants charakterisiert, ist nicht möglich. Man erhält dann, sofern $x = -s/\varepsilon^2$ gesetzt wird, aus (3,10)

$$(3,10\,a)\quad F(1+n, 1+n', 1, x) = \frac{\Gamma(1)\,\Gamma(n'-n)}{\Gamma(1+n')\,\Gamma(-n)} \cdot \frac{1}{-x}(-x)^{-n}\left\{1 + \frac{1}{x}\cdot\frac{(1+n)^2}{(1+n-n')} + \cdots\right\} + \frac{\Gamma(1)\,\Gamma(n-n')}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(-n')} \cdot \frac{1}{-x}(-x)^{-n'}\left\{1 + \frac{1}{x}\cdot\frac{(1+n')^2}{1+n'-n} + \cdots\right\}$$

Setzt man $\delta = Z/a_1k^2$; $n = Z/ia_1k$; $n' = Z/ia_1k'$; (n, n' rein imaginär), $a_1 = \hbar^2/me^2$, und benützt folgende Näherungsformeln (ε^2 vernachlässigt):

$$\text{I.}\quad \frac{\Gamma(n'-n)}{\Gamma(-n)} = \frac{(-n)\,\Gamma(1+n'-n)}{(n'-n)\,\Gamma(1-n)} \approx \frac{n(1-i\delta\varepsilon\,\Gamma'(1))}{i\delta\varepsilon\,\Gamma(1-n)},$$

(da $\Gamma(1+n'-n) \approx \Gamma(1-i\delta\varepsilon) \approx \Gamma(1) - i\delta\varepsilon\,\Gamma'(1)$ ist)

$$\text{II.}\quad \Gamma(1+n') \approx \Gamma(1+n-\delta i\varepsilon) \approx \Gamma(1+n)\,(1-i\delta\varepsilon\,\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)},$$

III $$\frac{\Gamma(n-n')}{\Gamma(-n')} \approx \frac{(-n')\,\Gamma(1+n-n')}{i\delta\varepsilon\,\Gamma(1-n')} \approx \frac{(-n+i\delta\varepsilon)\,(1+i\delta\varepsilon\,\Gamma'(1))}{i\delta\varepsilon\,\Gamma(1-n)\,(1+i\delta\varepsilon\frac{\Gamma'(1-n)}{\Gamma(1-n)})}$$

$$\approx \frac{(-n+i\delta\varepsilon)\,[1+i\delta\varepsilon\,(\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(1-n)}{\Gamma(1-n)})]}{i\delta\varepsilon\,\Gamma(1-n)},$$

IV. $$(-x)^{-n'} \approx (-x)^{-n}\,(1+i\delta\varepsilon\,\ln\frac{s}{\varepsilon^2}),$$

so erhält man:

(3,10 b) $$F(1+n,\,1+n',\,1,x) =$$

$$-\frac{n}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n)}\,\frac{1}{-x}\,\frac{(1-i\delta\varepsilon\,[\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}]}{i\delta\varepsilon}\,(-x)^{-n}\,[1+\varepsilon^2(\,.\,.)\,.\,.]$$

$$+\frac{(-n+i\delta\varepsilon)}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n)}\,-x^{-1}\cdot\frac{1+i\delta\varepsilon\,[\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(1-n)}{\Gamma(1-n)}]}{i\delta\varepsilon}\,(-x)^{-n}\cdot$$

$$(1+i\delta\varepsilon\,\ln\frac{s}{\varepsilon^2})\,[1+\varepsilon^2(\,.\,.)+\,.\,.)\,],$$

(3,10 c) $$F(1+n,\,1+n',\,1,x) =$$

$$\varepsilon^2\,[1-n\,(2\,\Gamma'(1)-\frac{\Gamma'(1+n)}{\Gamma(1+n)}-\frac{\Gamma'(1-n)}{\Gamma(1-n)}+\ln\frac{s}{\varepsilon^2})\,]\,(-x)^{-n}$$

$$[1+\varepsilon^2\,\ldots]$$

Wendet man (3,8) und (3.9) auf (3,11) an, so ergibt sich:

(3,11 a) $$F(1+n,\,1+n',\,1,x)+n\,F(1+n,\,1+n',\,2,x) =$$

$$=-\frac{1}{x}\,\frac{\Gamma(1)\,\Gamma(n'-n)\,(-n)}{\Gamma(1+n')\,\Gamma(1-n)}\,(-x)^{-n}\,[1+\frac{1}{x}\,\frac{(1+n)^2}{1+n-n'}+\ldots]$$

$$\frac{1}{x}\,\frac{\Gamma(1)\,\Gamma(n-n')\,(-n')}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n')}\,(-x)^{-n'}\,[1+\frac{1}{x}\,\frac{(1+n')^2}{1+n'-n}+\ldots]$$

$$\frac{n}{x}\,\frac{\Gamma(2)\,\Gamma(n'-n)\,(-x)^{-n}}{\Gamma(1+n')\,\Gamma(1-n)}\,[1+\frac{1}{x}\,\frac{(1+n)\,n}{1+n-n'}+\ldots]$$

$$-\frac{n}{x}\cdot\frac{\Gamma(2)\,\Gamma(n-n')}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n')}\,(-x)^{-n'}\,[1+\frac{1}{x}\,\frac{(1+n')\,n'}{1+n'-n}+\ldots]$$

Unter Benützung von I, II, III, IV erhält man:

$$(3{,}11\,b)\quad F(1+n,\ 1+n',\ 1,\ x)+n\,.\,F(1+n,1+n',\ 2,\ x)=$$

$$\frac{n}{x}\,\frac{(1\text{-}i\delta\varepsilon\ [\gamma(1)-\gamma(1+n)])\ (-x)^{-n}}{(-i\delta\varepsilon)\,\Gamma(1+n)\,\Gamma(1\text{-}n)}\ [1+x^{-1}\,\frac{(1+n)^2}{1-n-n'}+\ldots.]$$

$$+\frac{n'}{x}\,\frac{(1+i\delta\varepsilon[\gamma(1)-\gamma(1\text{-}n)+\ln\tfrac{s}{\varepsilon^2}])\ (-x)^{-n}}{(-i\delta\varepsilon)\,\Gamma(1+n)\,\Gamma(1\text{-}n)}$$

$$[1+x^{-1}\,\frac{(1+n')^2}{1+n'\text{-}n}+\ldots]$$

$$-\frac{n}{x}\,\frac{(1\text{-}i\delta\varepsilon\ [\gamma(1)-\gamma(1+n)])\ (-x)^{-n}}{-i\delta\varepsilon\,\Gamma(1+n)\,\Gamma(1\text{-}n)}\ [1+x^{-1}\,\frac{(1+n)\,n}{1+n\text{-}n'}+\ldots]$$

$$-\frac{n}{x}\,\frac{(1+i\delta\varepsilon[\gamma(1)-\gamma(1\text{-}n)+\ln\tfrac{s}{\varepsilon^2}])\ (-x)^{-n}}{i\delta\varepsilon\,\Gamma(1+n)\,\Gamma(1\text{-}n)}[1+x^{-1}\,\frac{(1+n')\,n'}{1+n'\text{-}n}+..]$$

(Abkürzung: $\gamma(x)=\dfrac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$).

Zusammengefaßt findet man:

$$(3{,}11\,c)\ F(1+n,\ 1+n',\ 1,\ x)+n\,.\,F(1+n,\ 1+n',\ 2,\ x)=$$

$$+\frac{\varepsilon^2}{s}\,\frac{(-x)^{-n}}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(1\text{-}n)}\ [1+i\delta\varepsilon\left(\gamma(1)-\gamma(1\text{-}n)+\ln\frac{s}{\varepsilon^2}\right)+\varepsilon^2\ldots]$$

Verfährt man mit (3,12) ebenso wie mit (3,10) und (3,11), so erhält man:

$$(3{,}12\,a)\ F(1+n,\ 2+n',\ 2,\ x)=$$

$$=\frac{\varepsilon^2}{s(1+n)}\,\frac{(-x)^{-n}}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(1\text{-}n)}\ [1\text{-}i\delta\varepsilon\ (\gamma(1)-\gamma(1+n)-(1+n)^{-1}+\ldots]$$

Man kann sich leicht überzeugen, daß (3,10 c), (3,11 c), (3,12 a) für $\varepsilon\to 0$ in die entsprechenden Gleichungen von Scherzer (aaO S. 159) übergehen.

Im Folgenden bedeute:

$F_1=F(1+n,\ 1+n',\ 1,\ x)$; $F_3=F(1+n,\ 2+n',\ 2,\ x)$

$F_2=F_1+n\,.\,F(1+n,\ 1+n',\ 2,\ x)=F_1+n\,.\,F_4$.

Unter Anwendung der Formeln (3, 2) u. (3, 3) ergibt sich:

$$M_x = -B\,[(k-k'\cos\vartheta)\,F_1 + 2kn\sin^2\vartheta/_2\,F_4],$$

$$(3{,}13)\quad \begin{matrix} M_y \\ M_z \end{matrix} = B\sin\vartheta \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix} (kn + k')\,F_3,$$

$$(3{,}4)\quad B = \frac{16\,\pi\,k\,n\,e^{-i\pi n}}{(k^2-k'^2)^2\,(k-k')^2}\left(\frac{k+k'}{k-k'}\right)^{n+n'};$$

$$(3{,}13a)\quad M_x = -B\,[2\,k\sin^2\vartheta/_2\,(F_2) + \varepsilon\cos\vartheta\,(F_1)], \text{ und}$$

$$(3{,}15)\quad \left|M_x^2\right| = \left|B\right|^2\,4\,k^2\sin^4\vartheta/_2\,F_2\tilde{F}_2 + 2\,k\sin^2\frac{\vartheta}{2}\,\varepsilon\cos\vartheta\,[F_2\tilde{F}_1 + F_1\tilde{F}_2] + \varepsilon^2\ldots$$

Nun ist:

$$(3{,}16)\quad F_2\tilde{F}_2 = \frac{\varepsilon^4}{s^2}\frac{[1 + i\delta\varepsilon\,(\gamma(1+n) - \gamma\,(1-n))]}{|\Gamma(1+n)|^4} \qquad \text{und}$$

$$(3{,}17)\quad [F_2\tilde{F}_1 + F_1\tilde{F}_2] = \frac{\varepsilon^4}{s^2}\frac{1}{|\Gamma(1+n)|^4}\left\{[1 + n\,(2\,\Gamma'(1) - \gamma\,(1-n) - \gamma(1+n) + \ln\frac{s}{\varepsilon^2})] + [1 - n\,(2\Gamma'(1) - \gamma(1+n) - \gamma(1-n) + \ln\frac{s}{\varepsilon^2}]\right\} - \frac{\varepsilon^4}{s^2}\frac{2}{|\Gamma(1+n)|^4}$$

Setzt man (3,16 und (3.17) in (3.15) ein, so erhält man

$$(3{,}15\,a)\quad |M_x^2| = \frac{4k^2\sin^4\vartheta/_2\;B^2\;\varepsilon^4}{s^2\,|\Gamma(1+n)|^4}[1 + \frac{\varepsilon\cos\vartheta}{k\sin^2\vartheta/_2} + i\delta\varepsilon\,(\gamma\,(1+n) - \gamma(1-n))] + \varepsilon^2\ldots\ldots$$

Setzt man (3,12 a) in (3,13) ein, so ergibt sich:

$$(3{,}13\,b)\quad \begin{matrix} M_y \\ M_x \end{matrix} \approx B\sin\delta \begin{Bmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{Bmatrix} (k(1+n) - \varepsilon)\;\varepsilon^2(-x)^{-n}\,(1 - i\delta\varepsilon\,[\gamma(1) - \gamma(1+n) - (1+n)^{-1})]$$
$$s\,(1+n)\,|\Gamma(1+n)|^2$$

und daraus:

$$(3{,}18)\quad \begin{matrix} |M_y^2| \\ |M_z^2| \end{matrix} \approx |B^2|\,\sin^2\vartheta \begin{Bmatrix} \cos^2\varphi \\ \sin^2\varphi \end{Bmatrix} (k\,(1+n) - \varepsilon)(k\,(1-n) - \varepsilon)$$

$$\frac{\varepsilon^4\ [A]\ [\tilde{A}]}{s^2\ |1+n|^2\,|\Gamma(1+n)|^4}$$

wobei:

$$(3{,}19)\quad [A]\ [\tilde{A}] = (1-i\delta\varepsilon\ [\gamma\ (1) - \gamma\ (1+n) - (1+n)^{-1}\ ]) \cdot (1+i\delta\varepsilon\ [\gamma(1) - \gamma(1-n) - (1-n)^{-1}\,]) = 1 - \frac{\varepsilon\delta \cdot 2 \cdot |n|}{|1+n|^2} + i\delta\varepsilon\ (\gamma(1+n) - \gamma\ (1-n))$$

Damit ergibt sich nun:

$$(3{,}20)\quad |M_y^2| + |M_z^2| = \frac{B^2 \sin^2\vartheta\, k^2\, \varepsilon^4}{s^2\,|\Gamma(1+n)|^4}\,[1 - \frac{2\varepsilon}{k} + i\delta\varepsilon\ (\gamma\ (1+n) - \gamma(1-n))] + \varepsilon^2 \ldots .$$

Nach Sommerfeld[1]) ist:

$$(A)\quad \frac{e^{-i\pi n}}{\Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n)} = \frac{1-e^{-2i\pi n}}{2i\pi n};\quad \text{analog für } n';$$

$$(B)\quad N^2 = (2\pi)^{-2}\,\frac{in}{1-e^{-2i\pi n}} = \Gamma(1+n)\,\Gamma(1-n)\,(2\pi)^{-3}\,e^{i\pi n};\ \text{analog für } N'.$$

Außerdem gilt:

(C) $v'/v = k'/k \approx 1 - \varepsilon/k$

Unter Benutzung von (II), (A), (B), (C) erhält man aus (3, 4):

$$(3{,}4\,a)\quad C \approx \frac{m^2\omega^3 e^2\,|\Gamma(1+n)|^4}{h^3\,c^3\,e^{2\pi i n}}\,[1 - \frac{\varepsilon}{k} + \varepsilon\delta\pi - \varepsilon i\delta\ (\gamma\ (1+n) - \gamma\ (1-n))]$$

Berücksichtigt man, daß

(D) $s^2 = s_o^2\,(1 - \frac{2\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon^2}{k^2})$ zu setzen ist, sofern

$s = 4kk'\ \sin^2\vartheta/_2$ und $s_0 = 4k^2\ \sin^2\ \vartheta/_2$ ist, so ergibt sich bei Addition von (3,14 a) und (3,20):

$$(3{,}21)\quad |M_x^2| + |M_y^2| + |M_z^2| \approx \frac{B^2\,\varepsilon^4\,4\sin^2\vartheta/_2\,k^2}{s_o^2\,|\Gamma(1+n)|^4}\,[1 + \frac{\varepsilon}{k} + \varepsilon i\delta\ (\gamma(1+n) - \gamma(1-n))]$$

1) A. Sommerfeld aaO S. 329.

Setzt man (3,4 a) und (3,21) in (3,2) ein, so gewinnt man:

$$(3,22)\quad d\Phi = \frac{B^2 \varepsilon^4 k^2 4 \sin^2\vartheta}{s_o^2 |\Gamma(1+n)|^4} \cdot \frac{2}{3} \frac{m^2 \omega^3 e^2 |\Gamma(1+n)|^4}{h^3 c^3 e^{-2\pi i n}} [1 + \varepsilon \pi \delta]$$
$$\cdot \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, d\omega$$

Setzt man den Wert von B (vgl. (3,4) und δ ein, so ergibt sich:

$$(3,23)\quad d\Phi = \frac{16 \cdot 16 \pi^2 k^4 |n|^2 e^{-2i\pi n} \varepsilon^4 \cdot 4 \sin^2\vartheta/2}{(k^2-k'^2)^4} \cdot \frac{2 m^2 \omega^3 e^2}{(k-k')^4 \cdot 16 k^4 \sin^4\vartheta/2 \; 3 h^3 c^3 e^{-2i\pi n}}$$
$$\cdot \left[1 + \varepsilon\left(\frac{Z\pi}{a_1 k^2}\right)\right] \; d\omega \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi.$$

Außerdem ist:

$$(3,24)\quad (k^2-k'^2)^{-4} \frac{h^4}{16 (2\pi)^4 \omega^4 m^4}; \quad |n|^2 = \frac{Z^2 (2\pi)^2 e^4}{v^2 h^2}$$

Gln. (3,24) eingesetzt in (3,23) ergeben:

$$(3,25)\quad d\Phi = \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 h v^2 c^3} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{\sin^2\vartheta/2} \left[1 + \varepsilon \frac{Z\pi}{a_1 k^2}\right]$$
$$= \frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6}{m^2 h v^2 c^3} \frac{d\omega}{\omega} \frac{\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{\sin^2\vartheta/2} \left[1 + \omega \frac{Z e^2 (2\pi)}{2 m v^3}\right]$$

Für großes v muß (3,25) in eine entsprechende Entwicklung der Formel (3,5) übergehen. Es zeigt sich tatsächlich, daß der Koeffizient von ε in beiden Fällen derselbe ist.

$$(3,5)\quad d\Phi = C' \frac{n^4}{(e^{2\pi i n}-1)(1-e^{-2\pi i n'})} \frac{v^2}{v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\vartheta}$$
$$= \ldots \left(1 + \varepsilon \frac{Z\pi}{a_1 k^2} + \varepsilon^2 (\ldots) \ldots\right) \quad , \text{da}$$

$$\frac{v^2}{v^2 + v'^2 - 2vv' \cos\vartheta} = \frac{1}{4 \sin^4\vartheta/2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{k} + \frac{\varepsilon^2}{4 k \sin^2\vartheta/2} + \varepsilon^3 \ldots\right)} \quad \text{und}$$

$$\frac{n^4}{(e^{2\pi i n}-1)(1-e^{-2\pi i n'})} \sim (1 - \varepsilon (k^{-1} - \delta\pi) + \varepsilon^2 \ldots) \text{ ist.}$$

4. Das Unendlichwerden des differentiellen Wirkungsquerschnittes $d\Phi$ für kleine ω und für kleine ϑ glaubt Scherzer darin begründet, daß die unendlich vielen Elektronen, die in sehr großem Abstand am Kern vorbeifliegen, in ihrer Gesamtheit einen unendlichen Beitrag liefern; man kann in der Tat das Unendlichwerden von $d\Phi$ beseitigen, sofern man nur für das stoßende Teilchen nicht eine Wellenfunktion im unendlichen Raum, sondern ein Wellenpaket von begrenzter Ausdehnung annimmt. Trotzdem gilt der Mott'sche Einwand, daß der Wirkungsquerschnitt in der Grenze $\omega \to 0$ nicht mehr korrekt dargestellt wird, weil die Möglichkeit der Aussendung mehrerer Quanten vernachlässigt wurde, auch für die Scherzer'sche Entwicklung, denn Scherzer benützt (siehe Scherzer aaO Energiegleichung S. 147) die Annahme, daß der ganze Energieverlust in Form eines Quants ausgestrahlt wird.

§ 4. Streuformel nach Bethe-Heitler und Sauter.

1. H. Bethe und W. Heitler [1] [2]) berechnen die Uebergangswahrscheinlichkeit für folgenden Prozeß: Ein Partikel (Masse = m, Ladung = e) mit dem Impuls $m\mathfrak{v} = \mathfrak{p}$ und der Energie E geht über in einen Zustand mit dem Impuls $m\mathfrak{v}' = \mathfrak{p}'$ und der Energie E', während ein Lichtquant mit dem Impuls $\hbar \mathfrak{k}_s$ und der Kreisfrequenz $\omega_s = c\, k_s = (E - E')/\hbar$ ausgesandt wird. Die Störung, die diesen Uebergang verursacht, ist 1. die Wechselwirkung des Teilchens mit dem Kern: $U = \frac{Ze^2}{r}$ und 2. die Wechselwirkung mit dem Strahlungsfeld: $V = -e\,(\vec{\alpha}\mathfrak{A})$, wobei wie in § 2 $\mathfrak{A}$ das Vektorpotential des Strahlungsfeldes und $\vec{\alpha}$ den Dirac'schen Matrixvektor darstellt. Statt $\frac{\mathfrak{p}}{m}$ (vgl. § 2) tritt nunmehr $c\vec{\alpha}$ auf, da Bethe-Heitler relativistisch rechnen und $c\vec{\alpha}$ physikalisch als

1) H. Bethe und W. Heitler aaO S. 83 ff.

2) W. Heitler ZS. f. Phys. 84 (1933) 145 ff.

Teilchengeschwindigkeit gedeutet werden kann (c Lichtgeschwindigkeit). Um die Uebergangswahrscheinlichkeit vom Zustand ($\mathfrak{v}$, o Lichtquanten) zum Zustand ($\mathfrak{v}'$, $1_{s\lambda}$ Lichtquant der Frequenz ω_s) mittels der Dirac'schen Methode zu erhalten, werden zwei Zwischenzustände betrachtet, die nicht direkt beobachtet werden. Die Einführung von Zwischenzuständen ist notwendig aus folgender Ueberlegung heraus: Ist die Gesamtstörung

$$S = U + V = \frac{Ze^2}{r} - e(\vec{\alpha}\mathfrak{A}),$$

so wäre die Uebergangswahrscheinlichkeit $W(\mathfrak{v}, o; \mathfrak{v}', 1_{s\lambda})$ nach der Dirac'schen Theorie zu errechnen durch das Matrixelement der Störung:

$$S(\mathfrak{v}, o; \mathfrak{v}', 1_{s\lambda}) = \int_{i(\mathfrak{p},r)} \tilde{\psi}(\mathfrak{v}) S \psi(\mathfrak{v}')\, dV \qquad \text{wobei}$$

$\psi(\mathfrak{v}) = \frac{1}{\sqrt{G}} u(\mathfrak{v}) e^{\frac{i(\mathfrak{p},r)}{\hbar}}$ die Wellenfunktion einer ebenen Welle mit dem Impuls $\mathfrak{p}$,

$\psi(\mathfrak{v}') = \frac{1}{\sqrt{G}} u(\mathfrak{v}') e^{\frac{i(\mathfrak{p}',r)}{\hbar}}$

die Wellenfunktion einer ebenen Welle mit dem Impuls $\mathfrak{p}'$ bedeutet. $u(\mathfrak{v})$ und $u(\mathfrak{v}')$ sind auf 1 normiert. Doch sind diese Matrixelemente $S(\mathfrak{v}, o; \mathfrak{v}', 1_{s\lambda}) = o$, da sich S additiv aus zwei Teilen zusammensetzt, wobei das Coulombfeld U keine Uebergänge der Strahlung und die Kopplung V keine Ablenkung des Teilchens bewirkt. Als Zwischenzustände I und II werden nun folgende Zustände betrachtet:

I. Das Teilchen besitzt einen Impuls $m\mathfrak{v}_1$:
$m\mathfrak{v}_1 = m\mathfrak{v}' + \hbar\mathfrak{k}_s$, kein Lichtquant vorhanden.

II. Das Teilchen besitzt einen Impuls $m\mathfrak{v}_2$:
$m\mathfrak{v} = m\mathfrak{v}_2 + \hbar\mathfrak{k}_s$, ein Lichtquant der Sorte s, λ ist vorhanden.

Bildet man nunmehr die Matrixelemente der Störung für die Uebergänge vom Anfangszustand zu den Zwischenzuständen I und II und zum Endzustand, so verschwinden diese Matrixele-

mente nicht mehr. Und daraus läßt sich die Uebergangswahrscheinlichkeit zwischen Anfangs- und Endzustand $W(\mathfrak{v}, o; \mathfrak{v}', 1_{s\lambda})$ berechnen. Dividiert man $W(\mathfrak{v}, o; \mathfrak{v}', 1_{s\lambda})$ durch den einfallenden Teilchenstrom $i_o = \frac{v}{G}$, so erhält man den Wirkungsquerschnitt $d\Phi_{s\lambda}$; über die Polarisationszustände λ und die Zustände positiver und negativer Energien ist im folgenden Ausdruck (4,1) schon summiert.

$$(4,1)\quad d\Phi_s = \frac{Z^2 e^4}{137 \cdot 2\pi} \frac{d\omega_s}{\omega_s} \frac{p'}{p} \frac{\sin\Theta' \sin\Theta d\Theta' d\Theta d\Psi}{q^4 c^4}$$

$$\cdot \Big[\frac{c^2 p'^2 \sin^2\Theta'}{(E' - cp'\cos\Theta')^2} (4E^2 - c^2 q^2)$$

$$+ \frac{c^2 p^2 \sin^2\Theta}{(E - c p \cos\Theta)^2} (4E'^2 - c^2 q^2)$$

$$- \frac{2 c^2 p p' \sin\Theta \sin\Theta' \cos\Psi}{(E' - c p' \cos\Theta')(E - c p \cos\Theta)} (4 E'E - q^2 c^2)$$

$$+ \frac{2\hbar^2\omega_s^2 c^2 (p'^2 \sin^2\Theta' + p^2 \sin^2\Theta - 2 p p' \sin\Theta' \sin\Theta \cos\Psi)}{(E' - c p' \cos\Theta')(E - c p \cos\Theta)} \Big]$$

$q = p - p' - \hbar \mathfrak{k}_s$ bedeutet den Impuls, der bei dem Stoß an den Kern abgegeben wird. Θ bzw. Θ' ist der Winkel zwischen $\mathfrak{k}_s$ und p bzw. p'; Ψ ist der Winkel zwischen der $(p, \mathfrak{k}_s)$-Ebene und der $(p', \mathfrak{k}_s)$-Ebene (vgl. Fig. 1, S. 79).

2. Um in (4,1) wie bei (2,23) den Winkel $\vartheta = \sphericalangle(p, p')$ zu erhalten, führt man folgende Transformationen durch:

$$(3,2)\quad d\Theta' d\Theta d\Psi \rightarrow \begin{cases} d\Theta d\vartheta d\chi \\ d\Theta' d\vartheta d\chi' \end{cases}$$

Man erhält (vgl. Fig. 1, S. 79).

I. $\cos\vartheta = \cos\Theta' \cos\Theta + \sin\Theta' \sin\Theta \cos\Psi = u = f_1(\Theta', \Psi)$,

II. $\cos\Theta' = \cos\Theta \cos\vartheta + \sin\Theta \sin\vartheta \cos\chi$,

III. $\sin\vartheta \cos\chi = v = g(\vartheta, \chi)$.

III und I eingesetzt in II ergibt:

IV. $\cos\Theta' = \cos^2\Theta\ \cos\Theta' + \cos\Theta\ \sin\ \Theta\ \sin\Theta'\ \cos\ \Psi + v \cdot \sin\Theta,$

IV a. $v = \dfrac{\cos\Theta'\ \sin^2\Theta - \cos\Theta\ \sin\Theta'\ \sin\Theta\ \cos\Psi}{\sin\Theta} = g_1\ (\Theta',\ \Psi),$

V. $u = \cos\vartheta = f\ (\vartheta,\ \chi).$

Setzt man $du \cdot dv = \Delta_1\,(\chi, \vartheta)\, d\chi d\vartheta$, so berechnet sich

VI. $\Delta_1\ (\chi, \vartheta) = \begin{vmatrix} f_\vartheta & g_\vartheta \\ f_\chi & g_\chi \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -\sin\vartheta, & \cos\vartheta\cos\chi \\ 0, & -\sin\vartheta\ \sin\chi \end{vmatrix} = \sin^2\vartheta\ \sin\chi$

Setzt man dagegen: $du \cdot dv = \Lambda_2\ (\Theta', \Psi)\, d\Theta'\, d\Psi$, so erhält man

VII. $\Delta_2\ (\Psi, \Theta') = \begin{vmatrix} f_{1\psi} & g_{1\psi} \\ f_{1\Theta'} & g_{1\,\Theta'} \end{vmatrix} =$

$$\begin{vmatrix} -\sin\Theta'\ \sin\Theta\ \sin\Psi & , & \cos\Theta\ \sin\Theta'\ \sin\Psi \\ -\sin\Theta'\cos\Theta\ +\ \cos\Theta'\sin\Theta\cos\Psi. & -\sin\Theta'\sin\Theta & -\cos\Theta'\cos\Theta\cos\Psi \end{vmatrix}$$

$= + \sin^2\Theta'\sin^2\Theta\sin\Psi,$

$+ \cos\Theta'\sin\Theta'\sin\Theta\cos\Theta\cos\Psi\sin\Psi$

$+ \sin^2\Theta'\cos^2\Theta\sin\Psi$

$- \sin\Theta\cos\Theta\ \sin\Theta'\cos\Theta'\sin\Psi\cos\Psi$

$= \sin^2\Theta'\ \sin\Psi$

Benützt man noch, daß

VIII. $\sin\vartheta\ \sin\chi = \sin\Theta'\ \sin\Psi$, so liefern VI und VII

(4,3) $d\chi\, d\vartheta = \dfrac{\Delta_2}{\Lambda_1} d\Theta' d\Psi = \dfrac{\sin\Theta'\ \sin\Psi\ \sin\Theta'}{\sin\ \vartheta\ \sin\Theta'\ \sin\Psi}\ d\Theta'\, d\Psi$

$= \dfrac{\sin\Theta'}{\sin\vartheta}\ d\Theta' d\Psi$

Ersetzt man Θ durch Θ' und χ durch χ', so gewinnt man die entsprechende Formel

(4,4) $d\Theta d\Psi = \dfrac{\sin\vartheta}{\sin\Theta}\ d\vartheta d\chi'$

Außerdem gelten noch folgende elementare Beziehungen (vgl. Fig. 1, S. 79).

(A) $\sin \Psi = \dfrac{\sin \vartheta \sin \chi}{\sin \Theta'}$,

(B) $\sin \Theta' \cos \Psi = \sqrt{\sin^2 \Theta' - \sin^2 \vartheta \sin^2 \chi}$

$= \cos \vartheta \sin \Theta - \cos \Theta \sin \vartheta \cos \chi.$

Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß das Elektron um ϑ $\sphericalangle (\mathfrak{p}, \mathfrak{p}')$ in den Raumwinkelbereich $2 \pi \sin \vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ unter gleichzeitiger Aussendung eines Lichtquantes mit einer Frequenz zwischen ω und $\omega + d\omega$ nach irgend einer Richtung gestreut wird, um diese Wahrscheinlichkeit zu berechnen, sind die Transformationen (4,3) bzw. (4,4) in der Gleichung (4,1) durchzuführen und über die Variablen Θ, χ bzw. Θ', χ' zu integrieren. Da hier nur die nichtrelativistische Formel gesucht wird, braucht die Integration auch nur für den nichtrelativistischen Fall durchgeführt zu werden.

3. Für den Uebergang vom relativistischen zum nichtrelativistischen Fall wird

(4,5) $\beta = \dfrac{v}{c}$ gegen 1

vernachlässigt. Um diese Vernachlässigung durchführen zu können, ist es notwendig, die Größenordnungen von E, p und k_s in (4,1) zu kennen. Da $m = \dfrac{m_0}{\sqrt{1 - \beta^2}}$ (m_0 = Ruhmasse) ist, so gilt:

$$E = m c^2 \approx E_{Ruh} = m_0 c^2$$
$$c p = m v c \approx E_{Ruh} \cdot \beta$$

(4,6) $\hbar \omega = E - E' = \dfrac{m_0}{2} (v^2 - v'^2)$ hat die Größenordnung von $E_{Ruh} \cdot \beta^2$

$c (p - p') = m c (v - v')$ hat die Größenordnung von $E_{Ruh} \cdot \beta$.

Bedeutet $\mathfrak{q} = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}' - \hbar \mathfrak{k}_s$ den an den Kern abgegebenen Impuls, so ist:

$$q^2 = p^2 + p'^2 + \hbar^2 k_s^2 - 2 pp' \cos \vartheta - 2 p \hbar k_s \cos \Theta$$
$$+ 2 p' \hbar k_s \cos \Theta'$$

(4,7) $$\approx p^2 + p'^2 - 2\ pp'\ \cos\vartheta$$
$$q^4 \approx (p^2 + p'^2 - 2\ pp'\ \cos\vartheta)^2$$

4. Unter Berücksichtigung dieser Größenordnungen liefert die Integration von (4,1) im nichtrelativistischen Fall — das letzte der vier Glieder in der eckigen Klammer von (4,1) kann dann vernachlässigt werden —, wenn man noch $\cos\Psi$ nach (B) auf S. 31 ausdrückt:

$$(4,9)\quad d\Phi = \int_s d\Phi_s = \frac{4\ Z^2 e^4 \alpha}{2\ \pi\ c^2}\ \frac{d\omega}{\omega}\ \frac{p'}{p}\ \sin\vartheta\ d\vartheta$$
$$\cdot\ [p'^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\Theta' d\Theta' d\chi' + p^2 \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \sin^3\Theta d\Theta d\chi$$
$$- 2\ p\ p' \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin^3\Theta\ \cos\vartheta - \sin^2\Theta\ \cos\Theta\ \cos\chi\ \sin\vartheta)\ d\Theta d\chi]$$
$$\cdot \frac{1}{(p^2 + p'^2 - 2\ p\ p'\ \cos\vartheta)^2}$$

In der eckigen Klammer von (4,9) stehen folgende vier Summanden:

$$J_1 = 2\pi\ p'^2 \int_0^{\pi} \sin^3\Theta' d\Theta' = 2\pi\ \frac{4}{3}\ p'^2,$$

$$J_2 = 2\ \pi\ p^2 \int_0^{\pi} \sin^3\Theta d\Theta = 2\ \pi\ \frac{4}{3}\ p^2,$$

$$J_3 = -\ 2\ p\ p'\ 2\ \pi\ \cos\vartheta \int_0^{\pi} \sin^3\Theta d\Theta = -\ 2\ \pi\ \frac{4}{3}\ 2\ p\ p'\ \cos\vartheta,$$

$$J_4 = -2\ p\ p' \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} (\sin^2\Theta\ \cos\Theta\ \cos\chi\ \sin\vartheta)\ d\Theta d\chi = 0.$$

Setzt man J_1, J_2, J_3 in (4,9) ein, so erhält man:

$$(4{,}10)\quad d\Phi = \frac{Z^2 e^4 \alpha}{c^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\frac{8}{3\pi}\,\frac{p'}{p}\,\frac{2\pi \sin\vartheta d\vartheta}{p^2 + p'^2 - 2\,p\,p'\cos\vartheta}$$

Für $p' \to p$, d. h. für $\omega \to o$ ergibt sich:

$$(4{,}11)\quad d\Phi = \frac{Z^2 e^4 \alpha}{c^2 p^2}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\frac{2}{3\pi}\,\frac{2\pi \sin\vartheta d\vartheta}{\sin^2 \vartheta/_2}$$

$$= \frac{4 Z^2 e^6}{3 p^2 c^3 h}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\frac{2\pi \sin\vartheta d\vartheta}{\sin^2 \vartheta/_2}$$

Die Gln. (4,10) und (4,11) besagen dasselbe, wie die Mott'schen Formeln (2,23) und (2,24).

5. Mit der gleichen Methode, die Bethe und Heitler anwandten, errechnet auch Sauter[1]) den differentiellen Wirkungsquerschnitt für denselben Prozeß. Im nicht-relativistischen Fall erhält Sauter:

$$(4{,}12)\quad d\Phi_{s\lambda} = \frac{2 Z^2 e^6}{\pi c^3 h}\,\frac{p'}{p}\,\frac{d\omega_s}{\omega_s}\,\sin\vartheta d\vartheta$$

$$\cdot \int \frac{\sin\Theta d\Theta d\chi}{q^4}\left(\frac{(e_{s\lambda}, p')}{1 - \frac{(v', \mathfrak{k}_s)}{\omega_s}} - \frac{(e_{s\lambda}, p)}{1 - \frac{(v, \mathfrak{k}_s)}{\omega_s}}\right)^2.$$

Führt man die Summation über die Polarisationszustände λ aus (genaue Rechnung am Schluß dieses Paragraphen), so erhält man:

$$(4{,}13)\quad d\Phi_s = \frac{2 Z^2 e^6}{\pi c^3 h}\,\frac{p'}{p}\,\frac{d\omega}{\omega}\,\sin\vartheta\, d\vartheta$$

$$\cdot m^2 \int \frac{\sin\Theta d\Theta d\chi}{q^4}\left[\left(\frac{v}{1 - \frac{v_s}{c}} - \frac{v'}{1 - \frac{v'_s}{c}}\right)^2 - \left(\frac{v_s}{1 - \frac{v_s}{c}} - \frac{v'_s}{1 - \frac{v'_s}{c}}\right)^2\right]$$

v_s bzw. v'_s sind die Komponenten von v bzw. v' längs $\mathfrak{k}_s$. Für das Folgende ersetzt man $1 - \frac{v_s}{c}$ durch 1 und für q^4 setzt man nach (4,7) $q^4 = (p^2 + p'^2 - 2\,p\,p'\cos\vartheta)^2$.

1) Fr. Sauter, Ann. d. Phys. (V) 18 (1933) 490 ff. und 20 (1934) 404 ff.

Bei der Integration über alle Richtungen von $\mathfrak{k}_s$ hat man dieselbe Rechnung durchzuführen, wie bei (4,9). Es ist:
$[(\mathfrak{v}-\mathfrak{v}')^2 - (\mathfrak{v}_s - \mathfrak{v}'_s)^2] = v^2 \sin^2\Theta + v'^2 \sin^2\Theta' - 2\, v\, v' \sin\Theta \sin\Theta' \cos\Psi$.

Nach durchgeführter Integration ergibt sich:

$$(4{,}14) \qquad \int_s d\Phi_s = d\Phi = \frac{16}{3} \frac{Z^2 e^6}{c^3 h} \frac{p'}{p} \frac{d\omega}{\omega} \frac{2\pi \sin\vartheta\, d\vartheta}{p^2 + p'^2 - 2\, p\, p' \cos\vartheta}.$$

Unterläßt man in (4,12) die Summation über die Polarisationszustände und integriert (4,12) über alle Austrittsrichtungen des Lichtquants, so ergibt sich die Formel (2,23), die Mott berechnet, indem er nur einen Polarisationszustand in Betracht zieht. Statt über alle Austrittsrichtungen des Lichtquants, kann man auch über alle Richtungen von $e_{s\lambda}$ integrieren. In letzterem Fall ergibt sich eine einfachere Integration:

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\varepsilon_\lambda\, d\varepsilon_\lambda\, d\varphi_\lambda\, ((e_{s\lambda}, p') - (e_{s\lambda}, p))^2$$

$$(4{,}16) \quad = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\varepsilon_\lambda\, d\varepsilon_\lambda\, d\varphi_\lambda\, (p^2 \cos^2\varepsilon_\lambda - 2\, p\, p' (\cos^2\varepsilon_\lambda \cos\vartheta + \cos\varepsilon_\lambda \sin\varepsilon_\lambda \sin\vartheta \cos\varphi_\lambda))$$

$$+ \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sin\varepsilon'_\lambda\, d\varepsilon'_\lambda\, d\varphi'_\lambda\, (p'^2 \cos^2\varepsilon'_\lambda)$$

$$= 4\pi \cdot \frac{1}{3} (p^2 + p'^2 - p\, p' \cos\vartheta)$$

Die Winkel (vgl. Fig. 2, S. 79) haben folgende Bedeutung:

$\varphi_\lambda = \sphericalangle (e_{s\lambda}, \mathfrak{v})$ Ebene und $(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}')$ Ebene;

$\varphi'_\lambda = \sphericalangle (e_{s\lambda}, \mathfrak{v}')$ Ebene und $(\mathfrak{v}, \mathfrak{v}')$ Ebene;

$\varepsilon_\lambda = \sphericalangle (e_{s\lambda}, \mathfrak{v})$; $\varepsilon'_\lambda = \sphericalangle (e_{s\lambda}, \mathfrak{v}')$.

Die Ergebnisse von Sauter führen also auch auf die Mott'sche Formel.

6. Summation über die Polarisationszustände. Nach (4,12) ist folgende Summe zu bilden:

$$(4{,}17)\quad \sum_{\lambda=1}^{2}\left[\frac{(\mathfrak{v}, e_{s\lambda})}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}, \mathfrak{k}_s)} - \frac{(\mathfrak{v}', e_{s\lambda})}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}', \mathfrak{k}_s)}\right]^2 \cdot k_s^2$$

$$= \left[\frac{(\mathfrak{v}, e_{s1})}{1 - \frac{v_s}{c}} - \frac{(\mathfrak{v}', e_{s1})}{1 - \frac{v'_s}{c}}\right]^2$$

$$+ \left[\frac{(\mathfrak{v}, e_{s2})}{1 - \frac{v_s}{c}} - \frac{(\mathfrak{v}' e_{s2})}{1 - \frac{v'_s}{c}}\right]^2$$

$$= \left[\frac{v\cos\varepsilon_1}{1-\beta_s} - \frac{v'\cos\varepsilon_1'}{1-\beta'_s}\right]^2 + \left[\frac{v\cos\varepsilon_2}{1-\beta_s} - \frac{v'\cos\varepsilon'_2}{1-\beta'_s}\right]^2$$

$$= \frac{v^2(\cos^2\varepsilon_1 + \cos^2\varepsilon_2)}{(1-\beta_s)^2} + \frac{v'^2(\cos^2\varepsilon'_1 + \cos^2\varepsilon'_2)}{(1-\beta'_s)^2}$$

$$- \frac{2\,v\,v'}{(1-\beta_s)(1-\beta'_s)}\left[\cos\varepsilon_1\cos\varepsilon'_1 + \cos\varepsilon_2\cos\varepsilon'_2\right]$$

$$(v_s/c = \beta_s;\ v'_s/c = \beta'_s)$$

Dazu kommen die elementaren Beziehungen, wenn man noch (vgl. Fig. 2, S. 79).

ψ_1 = Winkel zwischen der $(e_{s1}, \mathfrak{k}_s)$ Ebene und der $(\mathfrak{v}, \mathfrak{k}_s)$ Ebene und ψ_2 = Winkel zwischen der $(e_{s2}, \mathfrak{k}_s)$ Ebene und der $(\mathfrak{v}', \mathfrak{k}_s)$ Ebene einführt:

(a)
$$\cos^2\varepsilon_1 + \cos^2\varepsilon_2 = 1 - \cos^2\Theta$$
$$\cos^2\varepsilon'_1 + \cos^2\varepsilon'_2 = 1 - \cos^2\Theta'$$

(b)
$$\cos\varepsilon_1 = \sin\Theta\cos\psi_1$$
$$\cos\varepsilon'_1 = \sin\Theta'\cos\left(\frac{\pi}{2} + \psi_2\right) = -\sin\Theta'\sin\psi_2$$
$$\cos\varepsilon_2 = \sin\Theta\cos\left(\frac{\pi}{2} - \psi_1\right) = \sin\Theta\sin\psi_1$$
$$\cos\varepsilon'_2 = \sin\Theta'\cos\psi_2$$

(c) $$\cos\vartheta = \cos\Theta\cos\Theta' + \sin\Theta\sin\Theta'\cos\Psi$$

(d) $$\cos\Psi = \cos\left(\frac{\pi}{2} - (\psi_1 - \psi_2)\right) = \sin\psi_1\cos\psi_2 - \cos\psi_1\sin\psi_2.$$

Gl. (d) in (c) eingesetzt, ergibt:

$$\cos\vartheta - \cos\Theta\ \cos\Theta' = \sin\Theta \sin\Theta'\ (\sin\ \psi_1\ \cos\psi_2 - \cos\psi_1\ \sin\psi_2).$$

Wegen (b) ergibt sich:

$$\text{(e)}\quad \cos\varepsilon_1 \cos\varepsilon'_1 + \cos\ \varepsilon_2\ \cos\ \varepsilon'_2 = \sin\Theta\ \sin\Theta'\ (-\cos\psi_1 \sin\psi_2 + \sin\psi_1\ \cos\psi_2) = \cos\vartheta - \cos\Theta\ \cos\Theta'.$$

Setzt man (e) in (4,17) ein, so gewinnt man:

$$\sum_{\lambda=1}^{2} k_s^2 \left[\frac{(\mathfrak{v}, \mathfrak{e}_{s\lambda})}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}, \mathfrak{k}_s)} - \frac{(\mathfrak{v}', \mathfrak{e}_{s\lambda})}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}', \mathfrak{k}_s)}\right]^2$$

$$\frac{\mathfrak{v}^2}{(1-\frac{v_s}{c})^2} + \frac{\mathfrak{v}'^2}{(1-\frac{v'_s}{c})^2} - \frac{2\,\mathfrak{v}\,\mathfrak{v}'}{(1-\frac{v_s}{c})\,(1-\frac{v'_s}{c})}$$

$$\frac{v^2\cos^2\Theta}{(1-\frac{v_s}{c})^2} - \frac{v'^2\cos^2\Theta'}{(1-\frac{v'_s}{c})^2} + \frac{2\,v\,v'\cos\Theta\cos\Theta'}{(1-\frac{v_s}{c})\,(1-\frac{v'_s}{c})}$$

$$= \left(\frac{\mathfrak{v}}{1-\frac{v_s}{c}} - \frac{\mathfrak{v}'}{1-\frac{v'_s}{c}}\right)^2 - \left(\frac{v_s}{1-\frac{v_s}{c}} - \frac{v'_s}{1-\frac{v'_s}{c}}\right)^2$$

$$\left[\frac{[n\mathfrak{v}]}{1-\frac{(\mathfrak{v}n)}{c}} - \frac{[n\mathfrak{v}']}{1-\frac{(\mathfrak{v}'n)}{c}}\right]^2 \quad \text{mit:}\ n \quad \frac{\mathfrak{k}_s}{k_s}.$$

§ 5. Streuformeln nach Bloch und Nordsieck.

1. Die von Mott, Sommerfeld-Scherzer, Bethe-Heitler angegegebenen Streuformeln haben alle die Eigenart, daß die Wahrscheinlichkeit für die Streuung eines Elektrons an einem Kern unter gleichzeitiger Aussendung eines einzelnen Lichtquants der Kreisfrequenz ω für kleine Kreisfrequenzen $\frac{d\omega}{\omega}$ proportional ist für alle Streuwinkel. Damit wird die Gesamtwahrscheinlichkeit für die Streuung eines Elektrons unter gleichzeitiger Aussendung irgendeines Lichtquantes, die man durch Integration über alle ω erhält, logarithmisch unendlich. Diese offensichtliche Schwierigkeit wurde von Bloch und Nordsieck [1])

1) F. Bloch und A. Nordsieck aaO S. 54.

beseitigt. Zunächst soll für den relativistischen Fall die Methode von Bloch und Nordsieck kurz dargestellt werden. Diese Methode ist wie in den vorangegangenen Paragraphen die Methode der Dirac'schen Strahlungstheorie, nur daß bisher die Vernachlässigung benützt worden ist, daß nur ein Lichtquant beim Stoß eines Elektrons emittiert wird, eine Vernachlässigung, die Bloch und Nordsieck nicht mehr machen. Sie zeigen vielmehr im Laufe der Rechnung, daß bei jedem Elementarakt unendlich viele Lichtquanten ausgesandt werden, die eine Häufungsstelle bei $\omega = 0$ haben.

Der Hamiltonoperator des Gesamtsystems (Elektron + Strahlungsfeld) ist:

$$(5,1)\quad H = c\,[(\vec{\alpha}, \mathfrak{p} - (e/c)\,\mathfrak{A}) + \alpha_4\, m_0\, c] + \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\, dV.$$

Gl. (5,1) ist das relativistische Analogon zu der Hamiltonfunktion, die Mott ansetzt in (2,3). In (5,1) bedeuten:

$\vec{\alpha}$ den Dirac'schen Matrixvektor, den man physikalisch als Geschwindigkeit des Elektrons dividiert durch c deuten kann,

$\mathfrak{p}$ den Impulsoperator,

$\mathfrak{A}$ das Vektorpotential des Strahlungsfeldes in dem Periodizitätsbereich G.

$\mathfrak{E}$ den transversalen Teil der elektrischen Feldstärke,

$\mathfrak{H}$ die magnetische Feldstärke.

Die räumliche Fourierzerlegung des Vektorpotentials $\mathfrak{A}$ des Strahlungsfeldes wird in folgender Weise angesetzt:

$$(5,2)\quad \mathfrak{A}(\mathfrak{r}) = 2c\left(\frac{\pi\hbar}{G}\right)^{1/2} \sum_{s\lambda} \frac{e_{s\lambda}}{\omega_s^{1/2}} (P_{s\lambda} \cos(\mathfrak{k}_s, \mathfrak{r}) + Q_{s\lambda} \sin(\mathfrak{k}_s, \mathfrak{r})).$$

Der Summationsindex s charakterisiert die Richtung und die Kreisfrequenz ω_s der verschiedenen Wellen mit dem elektrischen Ausbreitungsvektor $\mathfrak{k}_s$; λ gibt den Zustand der Polarisation an; $e_{s\lambda}$ ist der Einheitsvektor in der Richtung der elektrischen Feldstärke.

Es ist: $|e_{s\lambda}| = 1$; $(e_{s\lambda}, \mathfrak{k}_s) = 0$; $(e_{s1}, e_{s2}) = 0$; $k_s = \frac{\omega_s}{c}$.

Die elektromagnetische Gesamtenergie des Periodizitätsbereiches G läßt sich auch ausdrücken in den kanonisch-konjugierten Variablen $P_{s\lambda}$, $Q_{s\lambda}$. Man erhält nämlich:

$$(5,3) \qquad H^{Str} = \frac{1}{8\pi}\int (\mathfrak{E}^2 + \mathfrak{H}^2)\ dV =$$

$$= \sum_{s\lambda} N_{s\lambda}\ \hbar\ \omega_s$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{s\lambda}\left(P^2_{s\lambda} + Q^2_{s\lambda}\right)\hbar\omega_s.$$

$\sum_{s\lambda} N_{s\lambda}\hbar\omega_s$ ist die Mott'sche Bezeichnungsweise, die schon im § 2 auftrat.

Es gelten folgende Beziehungen:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P_{s\lambda} + i\ Q_{s\lambda}) = a\ (\lambda, \mathfrak{k}_s)$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}(P_{s\lambda} - i\ Q_{s\lambda}) = \tilde{a}\ (\lambda, \mathfrak{k}_s)$$

$$a\ \tilde{a} = N\ (\lambda, \mathfrak{k}_s)$$

In der Bezeichnungsweise des § 2 ist auch [1]):

$\tilde{a} = \sqrt{N}\, e^{-\frac{i\Theta}{\hbar}}$; $a = e^{\frac{i\Theta}{\hbar}}\sqrt{N}$ Die Indices $s\lambda$ sind weggelassen. Mit (5,3) und (5,2) erhält man aus (5,1):

$$(5,4) \qquad H = c\ [(\vec{\alpha}, \mathfrak{p} - \sum_{s\lambda} \mathfrak{a}_{s\lambda} : [P_{s\lambda}\ \cos\ (\mathfrak{k}_s, \mathfrak{r})$$

$$+ Q_{s\lambda}\ \sin\ (\mathfrak{k}_s, \mathfrak{r})]) + \alpha_4 m_0\ c]$$

$$+ \frac{1}{2}\sum_{s\lambda}\ (P^2_{s\lambda} + Q^2_{s\lambda})\ \hbar\ \omega_s,$$

wobei:

$$(5,5) \qquad \mathfrak{a}_{s\lambda} = 2e\left(\frac{\pi\ \hbar}{G\omega_s}\right)^{1/2} e_{s\lambda}.$$

Gesucht wird nun eine Wellenfunktion $\psi(\mathfrak{r}, N_{s\lambda})$ als Lösung der Wellengleichung

1) W. Pauli, Handbuch d. Phys. 2. Aufl. XXIV/1 199.

(5,6) $(H - E(\mathfrak{v}, N_{s\lambda}))\ \psi = o$

mit:

(5,7) $$E(\mathfrak{v}, N_{s\lambda}) = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} + \sum_{s\lambda} (N_{s\lambda} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_s + \left(\frac{1}{2 \hbar c}\right) \sum_{s\lambda} \frac{(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}_{s\lambda})^2}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}, \mathfrak{k}_s)}$$

In (5,7) ist:

$\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ = kinetische Energie des Elektrons der Geschwindigkeit v (+ Ruhenergie),

$\sum_{s\lambda} (N_{s\lambda} + \frac{1}{2}) \hbar \omega_s$ = Energie der Lichtquanten (plus Nullpunktsenergie),

$\left(\frac{1}{2 \hbar c}\right) \sum_{s\lambda} \frac{(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}_{s\lambda})^2}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}, \mathfrak{k}_s)}$ = elektromagnetische kinetische Selbstenergie des Elektrons.

Um wenigstens eine Näherungslösung von (5,6) zu finden, vernachlässigen Bloch und Nordsieck in (5,7) die elektromagnet.-kinet. Selbstenergie des Elektrons gegenüber $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$, d. h. sie führen die Bedingung ein:

(5,8) $$\frac{1}{(2 \hbar c)} \sum_{s\lambda} \frac{(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}_{s\lambda})^2}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}\, \mathfrak{k}_s)} \ll \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}.$$

Außerdem vernachlässigen sie in erster Näherung die Reaktion des elektromagnetischen Feldes auf das Elektron. Für die Kopplung Materie und Strahlungsfeld ist in der Hauptsache das Glied (vgl. (2,5), (2,5 a)) $-e(\vec{\alpha}\, \mathfrak{A})$ verantwortlich ($\vec{\alpha}$ der Dirac'sche Ma-Matrixoperator). Unter der genannten Vernachlässigung verliert $\vec{\alpha}$ seinen Operatorcharakter und kann durch den gewöhnlichen Vektor $\frac{\mathfrak{v}}{c}$ ersetzt werden, ebenso ist α_4 durch $\sqrt{1 - v^2/c^2}$ zu ersetzen. Unter der weiteren Bedingung:

(5,9) $$\frac{e^2\,\omega^*}{m\,c^3}\left[f(v)\,\frac{\hbar\,\omega^*}{m\,c^2}+g(v)\,\frac{e^2\,\omega^*}{m\,c^3}\right]\ll 1,$$

die einer Vernachlässigung der Zustände negativer Energien entspringt (Näheres über (5,9) s. u. S. 76), ergibt sich als Näherungslösung von (5,6):

(5,10) $$\psi(\mathfrak{v}, N_{s\lambda}) = \frac{u(\mathfrak{v})}{\sqrt{G}}\exp\left\{\frac{i(\mathfrak{p}, r)}{\hbar}+i\sum_{s\lambda}\sigma_{s\lambda}\cos(\mathfrak{k}_s, r)\cdot\left[Q_{s\lambda}-\frac{1}{2}\sigma_{s\lambda}\sin(\mathfrak{k}_s, r\right]\right\}\cdot\prod_{s\lambda}h_{M_{s\lambda}}(Q_{s\lambda}-\sigma_{s\lambda}\sin(\mathfrak{k}_s, r),$$

wobei nun:

(5,11) $$\sigma_{s\lambda}=\frac{1}{c}\cdot\frac{(\mathfrak{v}, \mathfrak{a}_{s\lambda})}{\hbar\,(k_s-\frac{1}{c}(\mathfrak{v}, \mathfrak{k}_s)}$$ und $h_M(x)$ eine Lösung der Oszillatorengleichung:

$$h''_M - x^2 h_M + (2m+1)\,h_M = 0$$ darstellt.

Gl. (5,10) geht, wenn kein Strahlungsfeld vorhanden ist, über in die Lösung der Wellengleichung [1]):

(5,12) $$(H^{Mat}-E)=(c(\vec{\alpha}\,\mathfrak{p}+\alpha_4 m_0 c)-E)\,\psi = 0,$$

und man erhält statt (5,10):

(5,10 a) $$\psi(\mathfrak{v}, o)=\frac{u}{\sqrt{G}}\exp\frac{i(\mathfrak{p}, r)}{\hbar},$$

wo u wie in (5,10) eine vierkomponentige, vom Ort unabhängige Größe bedeutet, die auf 1 normiert ist:

$$u\,\tilde{u} = |u_1|^2+|u_2|^2+|u_3|^2+|u_4|^2 = 1$$

Im nicht-relativistischen Fall reduziert sich u auf eine einkomponentige Größe, für die auch: $u\tilde{u}=1$ gilt.

Mit (5,10) läßt sich nach der Dirac'schen Theorie die Uebergangswahrscheinlichkeit zwischen zwei Zuständen berechnen, sofern eine k l e i n e Störung als Ursache vorausgesetzt wird. Die beiden Zustände seien durch $(\mathfrak{v}, M_{s\lambda})$ einerseits und $(\mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ andererseits charakterisiert. $(\mathfrak{v}, M_{s\lambda})$ bzw. $(\mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ will besagen, das Elektron hat die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{v}'$ und gleichzeitig

1) W. Heitler aaO 148 f.

sind $M_{s\lambda}$ bzw. $N_{s\lambda}$ Lichtquanten der Sorte s, λ vorhanden.

Das Matrixelement der Störung U (=Störung des Coulombfeldes) errechnet sich in der üblichen Weise zu:

$$(5{,}13)\quad U(\mathfrak{v}, M_{s\lambda}; \mathfrak{v}', N_{s\lambda}) = \int \tilde{\psi}\ \mathfrak{v}, M_{s\lambda})\ U\psi\ (\mathfrak{v}', N_{s\lambda})\ d\tau$$

$$= \frac{1}{G}\int e^{\frac{i(p,r)}{\hbar}}\ \tilde{u}(\mathfrak{v})\ U\ u(\mathfrak{v}')\ e^{+\frac{i(p',r)}{\hbar}}\ dV$$

$$\cdot \prod_{s\lambda} I(\mathfrak{k}_s;\ \sigma_{s\lambda}, M_{s\lambda};\ \sigma'_{s\lambda}, N_{s\lambda}),$$

mit: $$I(\mathfrak{k};\ \sigma,\ M;\ \sigma',\ N) = \int dQ h_M(Q - \sigma \sin(\mathfrak{k}, r)).$$

$$\exp\left\{-i\,\frac{\sigma-\sigma'}{2}\cos(\mathfrak{k}, r)\ Q + \frac{1}{2}\,i\,\frac{\sigma^2-\sigma'^2}{2}\cdot\sin(\mathfrak{k}, r)\cos(\mathfrak{k}, r)\right\}$$

$$\cdot\ h_N(Q - \sigma' \sin(\mathfrak{k}, r)) = \exp\{-i\,(M-N)\,(\mathfrak{k}, r)\}\cdot K(\sigma, M; \sigma', N)$$

(Integrationselement $d\tau = dV\ dQ_{s\lambda}$)

(die Indices s, λ sind vorübergehend weggelassen).

Nach Integration über $Q_{s\lambda}$ erhält man (5,13) in der Gestalt:

$$(5{,}14)\quad \tilde{U}(\mathfrak{v}, M_{s\lambda};\ \mathfrak{v}', N_{s\lambda}) = \frac{1}{G} F(q) \prod_{s\lambda} K(\sigma_{s\lambda}, M_{s\lambda}\ \sigma'_{s\lambda},\ N_{s\lambda}),$$

wobei:

$$(5{,}15)\quad F(q) = G\int dV\ \tilde{\varphi}\ (\mathfrak{v})\ U\ \psi\ (\mathfrak{v}')\ e^{-i\sum_{s\lambda}(M_{s\lambda} - N_{s\lambda})(\mathfrak{k}_s, r)}$$

$$(5{,}16)\quad K(\sigma, M, \sigma', N) = \exp\left\{-\frac{1}{4}(\sigma-\sigma')^2\right\}(M!\,N!)^{1/2}$$

$$\left[-i\,2^{-1/2}(\sigma-\sigma')\right]^{|M-N|}\cdot\sum_{\zeta=0}^{1}\frac{\left[-\frac{1}{2}(\sigma-\sigma')^2\right]^{\zeta}}{(1-\zeta)!\,\zeta!\,(|M-N|+\zeta)!}$$

und analog zu (5,11):

$$\sigma'_{s\lambda} = \frac{1}{c}\,\frac{(\mathfrak{v}',\ a_{s\lambda})}{\hbar(k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}', \mathfrak{k}_s)}$$

$$\psi(\mathfrak{v}) = \frac{1}{\sqrt{G}}\,u(\mathfrak{v})\,e^{\frac{i(p,r)}{\hbar}}\quad \text{bzw.}\quad \psi(\mathfrak{v}') = \frac{1}{\sqrt{G}}\,u(\mathfrak{v}')\,e^{\frac{i(p',r)}{\hbar}}$$

bedeutet eine Wellenfunktion einer ebenen Welle, die einem Elektron der Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ bzw. $\mathfrak{v}'$ zugeordnet ist.

Nach der Dirac'schen Theorie ist dann die Wahrscheinlichkeit für einen Uebergang $(\mathfrak{v}, M_{s\lambda}) \rightarrow (\mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ in der Zeiteinheit gegeben durch:

$$(5{,}17) \quad T(\mathfrak{v}, M_{s\lambda}; \mathfrak{v}', N_{s\lambda}) = \left(\frac{2\pi}{\hbar G^2}\right) \cdot D(E(\mathfrak{v}, M_{s\lambda}) - E(\mathfrak{v}', N_{s\lambda}))$$

$$\cdot |F(q)|^2 \prod_{s\lambda} |K(\sigma_{s\lambda} M_{s\lambda}; \sigma'_{s\lambda}, N_{s\lambda})|^2$$

($D(\ldots)$ ist die Dirac'sche δ-Funktion).

Die Wahrscheinlichkeit für einen Uebergang $(\mathfrak{v}, o) \rightarrow (\mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ erhält man aus (5,17), indem man $M_{s\lambda} = o$ setzt:

$$(5{,}18) \quad T(\mathfrak{v}, o; \mathfrak{v}', N_{s\lambda}) = \left(\frac{2\pi}{\hbar G^2}\right) D(E(\mathfrak{v}, o) - E(\mathfrak{v}', N_{s\lambda})) \cdot$$

$|F(q)|^2 \Pi |K|^2$. $(\mathfrak{v}, o) \rightarrow \mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ bedeutet, daß man von einem Zustand, bei dem das Elektron die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ besitzt und kein Lichtquant vorhanden ist, zu einem Zustand übergeht, bei dem das Elektron die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ angenommen hat und $N_{s\lambda}$ Lichtquanten der Sorte s und des Polarisationszustandes λ vorhanden sind. Diese Wahrscheinlichkeit T wird nun über all die Zustände summiert, bei denen das Elektron in ein Raumwinkelelement $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ mit einer Energie zwischen $\frac{m}{2} v'^2$ und $\frac{m}{2} v'^2 + dE$ fliegt. Zu diesem Zweck hat man $T(\mathfrak{v}, o, \mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ mit der Zahl dieser Zustände zu multiplizieren und über dE zu integrieren. Die Zahl dieser Zustände ist [1]):

$$\varrho\, dE = \frac{\sin\vartheta d\vartheta d\varphi \; G\, p'\, E'\, dE}{c^2 (2\pi)^3 \hbar^3}$$

Damit ergibt sich:

$$(5{,}19) \quad \int T \varrho\, dE = W(\mathfrak{v}, o; \mathfrak{v}', N_{s\lambda}) \sin\vartheta d\vartheta d\varphi =$$

$$\frac{\sin\vartheta d\vartheta d\varphi \; m^2 v'}{4\pi^2 \hbar^4 G \left(1 - \frac{v'^2}{c^2}\right)} |F(\;)|^2 \prod_{s\lambda} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})^2} \frac{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})^2\right]^{N_{s\lambda}}}{N_{s\lambda}!}$$

1) W. Heitler aaO 155 f.

Dividiert man (5,19) noch durch den Strom der einfallenden Teilchen $i_0 = \frac{v}{G}$, so erhält man die Dimension einer Fläche, also einen differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$(5{,}20) \qquad d\Phi_{s\lambda} = W(\mathfrak{v}, o; \mathfrak{v}, N_{s\lambda}) \cdot \frac{G}{v} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \quad .$$

$d\Phi_{s\lambda}$ gibt die Wahrscheinlichkeit an, daß unter gleichzeitiger Aussendung von $N_{s\lambda}$ Lichtquanten der Sorte s, λ das Elektron statt $\mathfrak{v}$ die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ angenommen hat und in das Raumwinkelelement $\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ fliegt. Bloch und Nordsieck nehmen auf die Energie-Beziehung

$$(5{,}21) \qquad \frac{m}{2}(v^2 - v'^2) = \sum_{s\lambda} N_{s\lambda}(\hbar\omega_s)$$

keine Rücksicht. Dies ist insofern gerechtfertigt, als die Verfasser die Singularität, die für $\omega \to o$ in den Formeln der §§ 1 bis 3 auftritt, beseitigen wollen, sich also von vorneherein auf extrem kleine ω_s beschränken können.

2. Daß $\omega = o$ eine Häufungsstelle der Lichtquanten darstellt, läßt sich nach Bloch und Nordsieck zeigen. Ihre Schlußweise sei kurz dargestellt. Zunächst kann man nachweisen, daß die Wahrscheinlichkeit für die Emission einer endlichen Anzahl von Lichtquanten gleich Null ist. Nimmt man nämlich den Fall an, daß kein Lichtquant ausgesandt wird, d. h. daß alle $N_{s\lambda} = o$ sind, so erhält man für das Produkt $\prod_{s\lambda}$ in (5,19) unter Benützung von (5,5) und (5,11):

$$(5{,}22) \qquad \prod_{s\lambda} \exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})^2\right]$$

$$= \exp\left\{-\frac{2\pi e^2}{\hbar G} \sum_{s\lambda} \frac{1}{\omega_s} \left[\frac{\frac{1}{c}(\mathfrak{v}, \varepsilon_{s\lambda})}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}, \mathfrak{k}_s)} - \frac{\frac{1}{c}(\mathfrak{v}', \varepsilon_{s\lambda})}{k_s - \frac{1}{c}(\mathfrak{v}', \mathfrak{k}_s)}\right]^2\right\}.$$

Da die Anzahl der Strahlungskomponenten s, die in ein Intervall dk_s und in ein Raumwinkelelement $\sin\Theta d\Theta d\chi$ fallen, gleich

$$(5{,}23) \qquad \frac{G}{(2\pi)^3} \, k^2_s \, dk_s \sin\Theta d\Theta d\chi$$

ist, erhält man nach Ausführung der Summation über λ (vgl. ausführliche Rechnung am Schluß des § 4 o. S. 35) für die geschweifte Klammer in (5,22):

$$(5{,}24) \quad -\frac{e^2}{4\pi^2 \hbar c} \lim_{\omega_0 \to 0} \int_{\omega_0}^{\omega^*} \frac{d\omega_s}{\omega_s} \int_0^{\pi} \sin\Theta d\Theta \int_0^{2\pi} d\chi$$

$$\cdot \left[\left(\frac{v/c}{1 - \frac{v_s}{c}} - \frac{v'/c}{1 - \frac{v'_s}{c}} \right)^2 - \left(\frac{v_s/c}{1 - \frac{v_s}{c}} - \frac{v'_s/c}{1 - \frac{v'_s}{c}} \right)^2 \right].$$

v_s und v'_s sind die Komponenten von $\mathfrak{v}$ und $\mathfrak{v}'$ längs $\mathfrak{k}_s$. ω^* ist eine Grenzfrequenz, über die später noch näher zu sprechen ist. Die Integration über die Winkel liefert einen endlichen positiven Faktor; die Integration über die ω_s jedoch liefert ein Resultat, das in der Grenze $\omega_0 \to 0$ logarithmisch unendlich wird. Daraus folgt, daß (5,22) verschwindet. Wenn man in (5,19) eine endliche Anzahl der $N_{s\lambda}$ verschieden von Null annimmt, so unterscheidet sich (5,19) gegenüber (5,22) nur durch die Hinzufügung einer endlichen Anzahl von Faktoren, d. h. (5,19) bleibt Null. Die Wahrscheinlichkeit verschwindet daher für jeden Prozeß, bei dem nur eine endliche Anzahl von Lichtquanten ausgesandt wird. wird. Unendlich viele Lichtquanten können aber nur ausgesandt werden, wenn sie ihre Häufungsstelle bei $\omega_s = 0$ haben, da andernfalls die gesamte ausgestrahlte Energie unendlich wird.

3. In den §§ 2—5 zeigt sich, daß zur Berechnung der Wahrscheinlichkeit, daß ein Elektron unter Aussendung von Strahlung in ein Raumwinkelelement $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ abgelenkt wird, von den einzelnen Verfassern verschiedene Methoden angewandt wurden, die im Vorausgegangenen kurz skizziert worden sind. Es ist angezeigt, an dieser Stelle die einzelnen Methoden nochmals zu wiederholen und herauszustellen, worin sie sich unterscheiden bzw. was ihnen gemeinsam ist.

Bei jedem Stroßproblem kann man auf zwei Wegen zu einer Lösung gelangen. Man kann versuchen, die Stoßvorgänge nach der Born'schen Stoßtheorie[1]) durch stationäre Lösungen der

1) G. Wentzel aaO S. 714.

Wellengleichung d. h. durch zeitlich periodische Wellenfunktionen zu beschreiben, deren physikalische Deutung mittels Wahrscheinlichkeitsdichte und Wahrscheinlichkeitsstrom erfolgt. Eine solche Wellenfunktion hat die Gestalt $\psi = e^{-i\omega t} u$, wo u in folgender Weise entwickelt ist: $u = u^{(0)} + u^{(1)} + u^{(2)} \ldots$, $u^{(0)}$ bedeutet die Lösung der ungestörten Wellengleichung, $u^{(1)}$, $u^{(2)}$ ..bedeuten die Störungen aufsteigender Ordnungen. Die Wahrscheinlichkeitsdichte ist gegeben durch $\psi\,\tilde{\psi}$ und der Wahrscheinlichkeitsstrom ist $\sim (\psi \text{ grad } \psi - \psi \text{ grad } \tilde{\psi})$.

Eine formal etwas andere Beschreibung der Stoßvorgänge liefert die von Dirac herrührende Störungstheorie [1]) (Methode der Variation der Konstanten), deren nichtstationäre Näherungslösungen sofort auf Ausdrücke für die Uebergangswahrscheinlichkeiten der einzelnen Stoßprozesse führen. Die Dirac'sche Behandlung ist eine Näherung, bei der die Störungen als hinreichend klein angenommen werden; außerdem wird angenommen, daß die Störung zu einer Zeit t = o plötzlich eingeschaltet wird, d. h. für $t < o$ soll die Störung $S = o$ sein und für $t > o$ soll S sofort seinen vollen zeitunabhängigen Wert annehmen.

Bethe-Heitler und Bloch-Nordsieck wenden in ihren Rechnungen die Dirac'sche Störungstheorie an und erhalten so unmittelbar die gesuchten Uebergangswahrscheinlichkeiten. Die kleinen Störungen im Sinne der Theorie sind bei Bethe und Heitler:

1. die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Kern (Coulombfeld),
2. die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Strahlungsfeld.

Der Zustand vor dem Stoß wird beschrieben durch (ν, o). Dem Elektron ist eine ebene Welle zugeordnet der Form:

$$\psi(\nu) = \frac{u(\nu)}{\sqrt{G}} e^{\frac{i}{\hbar}(p, r)}.$$

Der Zustand nach dem Stoß wird charakterisiert durch $(\nu', 1_{s\lambda})$.

1) P. Dirac aaO S. 243 und S. 710; G. Wentzel aaO S. 735 und S. 742.

Dem Elektron ist eine ebene Welle zugeordnet der Form:

$$\psi(\mathfrak{v}') = \frac{u(\mathfrak{v}')}{\sqrt{G}} \, e^{\frac{i}{\hbar}(p', r)}$$

und das angeregte Lichtquant der Sorte s, λ hat den Impuls $\hbar \mathfrak{k}_s$. Die Dirac'sche Störungstheorie liefert dann unter Einschaltung von Zwischenzuständen (vgl. o. S. 26) unmittelbar die Uebergangswahrscheinlichkeit für $(\mathfrak{v}, o) \rightarrow (\mathfrak{v}', 1_{s\lambda})$.

Bloch und Nordsieck nehmen als kleine Störung im Sinne der Dirac'schen Methode nur die Wechselwirkung des Elektrons mit dem Kern an und berechnen die Uebergangswahrscheinlichkeit vom Zustand $(\mathfrak{v}, M_{s\lambda})$ — $(\mathfrak{v}, M_{s\lambda})$ will sagen, das Elektron hat die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und $M_{s\lambda}$ Lichtquanten der Sorte s, λ sind vorhanden — zum Zustand $(\mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ unter Einwirkung des stören-Kernfeldes. Der Zustand $(\mathfrak{v}, M_{s\lambda})$ ist beschrieben durch die Wellenfunktion:

$$\psi(\mathfrak{v}, M_{s\lambda}) = \frac{u(\mathfrak{v})}{\sqrt{G}} e^{\frac{i}{\hbar}(p, r) + i \sum_{s\lambda} \sigma_{s\lambda} \cos(\mathfrak{k}_s, r)\left[Q_{s\lambda} - \frac{1}{2} \sigma_{s\lambda} \sin(\mathfrak{k}_s, r)\right]} \cdot \prod_{s\lambda} h_{M_{s\lambda}}(Q_{s\lambda} - \sigma_{s\lambda} \sin(\mathfrak{k}_s, r))$$

(vgl. o. S.40.))

$\psi(\mathfrak{v}, M_{s\lambda})$ ist eine Näherungslösung der Wellengleichung:

$$(H - E(\mathfrak{v}, M_{s\lambda}))\,\psi = o, \text{ mit: } H = H^{Mat} + H^{str} + V,$$

wobei aber in erster Näherung V vernachlässigt wird, was sich darin ausdrückt, daß der Operator $c\hat{\alpha}$ durch den gewöhnlichen Vektor $\mathfrak{v}$ ersetzt wird. Analoges gilt für den Zustand $(\mathfrak{v}', N_{s\lambda})$. Die Bloch-Nordsieck'sche Behandlungsweise setzt also, wie die Bethe-Heitler'sche Kernfeld und Wechselwirkung zwischen Elektron und Strahlungsfeld als kleine Störungen an. Zur Berechnung der Uebergangswahrscheinlichkeit $(\mathfrak{v}, M_{s\lambda}) \rightarrow (\mathfrak{v}', N_{s\lambda})$ nach der Dirac'schen Methode nimmt sie nur das Kernfeld als Störung an und braucht deshalb keine Zwischenzustände einzuführen, wie es Bethe-Heitler tun mußten, um eine von Null verschiedene Uebergangswahrscheinlichkeit zu erhalten. Die Bloch-Nordsieck'sche Rechnung geht nur insofern über die Bethe-Heitler'sche hinaus, als sie das Vorhandensein und das Entstehen

von mehreren Lichtquanten während des Prozesses berücksichtigt.

In den Rechnungen von Mott und Scherzer werden zunächst stationäre Lösungen des Stoßproblems aufgestellt und daraus dann auf die Uebergangswahrscheinlichkeit geschlossen. Mott setzt als stationäre Lösung des gestellten Stoßproblems die Wellenfunktion an: (vgl. o. S. 15).

$$\psi\ (\mathbf{r}, \vartheta, \varphi, \ldots\ N_{s\lambda}\ldots) = \{\ \psi\ (\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) + \psi(\mathbf{r}, \vartheta, \varphi, o)\}\,\delta_o\ (N) + \Sigma\ \ \psi\ (\mathbf{r}, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda}, \ldots)\,\delta_{st}\ldots(N)$$

mit den asymptotischen Darstellungen:

$$\psi\ (\mathbf{r}, \vartheta, \varphi) \sim e^{\frac{i\,m\,v\,z}{\hbar}} + \frac{e^{\frac{i\,m\,v\,r}{\hbar}}}{r}\ f\ (\vartheta, \varphi).$$

Dies ist eine Lösung des Problems, wenn die Strahlung vernachlässigt und nur der Einfluß des Kernfeldes berücksichtigt wird. Sie stellt eine einlaufende ebene Welle + auslaufende Kugelwelle dar.

Die entsprechende asymptotische Darstellung ist:

$$\psi\ (\mathbf{r}, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}, 1_{t\lambda}\ldots) \sim \frac{e^{i\,(k'\ (1_{s\lambda},\ 1_{t\lambda}\ldots))r}}{r}\ u_{st}\ldots(\vartheta, \varphi).$$

Es ist die auslaufende Kugelwelle, wenn Strahlungsfeld und Kernfeld berücksichtigt werden. Der Wirkungsquerschnitt dafür, daß ein Elektron mit der Energie $E'_{st}\ldots = \hbar^2 \frac{1}{2\,m}\ k'^2\ (1_{s\lambda}, 1_{t\lambda}, \ldots)$ in das Raumwinkelelement $\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ gestreut wird und gleichzeitig ein Lichtquant der Sorte s, λ ausgesandt wird, ist gegeben durch das Verhältnis des Stromes der nach $\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi$ gestreuten Elektronen zur Stromdichte der einfallenden Elektronen. Da aber, wie oben schon bemerkt wurde, der Strom $\sim (\bar{\psi}\ \text{grad}\ \psi - \psi\ \text{grad}\ \bar{\psi})$ ist, erhält man als differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$d\Phi_{s\lambda} = \frac{k'\ (1_{s\lambda}\ \ 1_{t\lambda}\ldots)}{k}\ |u_{st}\ldots|^2\ \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Aehnlich ist die Methode von Scherzer, der ebenfalls für das Stoßproblem eine stationäre Lösung angibt. Bei Scherzer (aaO S. 149) treten zwei Wellenfunktionen ψ_1 und ψ_2 auf. ψ_1 als Analogon zu Mott's $\psi\ (r, \vartheta, \varphi)$ stellt die Wellenfunktion eines elastisch gestreuten Elektrons dar, die sich in derselben asymptotischen Form, wie $\psi\ (r, \vartheta, \varphi)$ darstellen läßt (A. Sommerfeld aaO A. 275). ψ_2 stellt die Wellenfunktion des durch die Emission eines Lichtquants mit vorgeschriebenen Eigenschaften abgebremsten Elektrons dar. ψ_2 tritt nur als auslaufende Kugelwelle auf und hat dieselbe asymptotische Darstellung wie $\psi\ (r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda}. 1_{t\lambda} \ldots)$ (O. Scherzer aaO S. 150). Der differentielle Wirkungsquerschnitt ergibt sich wie bei Mott in der Form:

$$d\Phi_{s\lambda} = \frac{k'\,(1_{s\lambda})}{k} |\psi_2|^2 \sin\vartheta d\vartheta d\varphi.$$

Während bis jetzt die Methoden von Mott und Scherzer übereinstimmen, gehen die Verfasser verschiedene Wege. um ψ_2 bzw. $\psi\ (r, \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda})$ zu erhalten. Mott gewinnt $\psi\ (r. \vartheta, \varphi, 1_{s\lambda})$ als Lösung der Gleichung (2,21) unter der Bedingung. daß die Kopplung zwischen Elektron und Strahlungsfeld als kleine Störung angesehen und gleichzeitig die Möglichkeit, daß zwei und mehr Lichtquanten beim Stoß eines Elektrons ausgesandt werden, als klein von zweiter Ordnung vernachlässigt wird. Im Verlauf der Rechnung benützt er auch die Bedingung $\alpha Z \ll \beta$, die für die Bornsche Näherung bei der Streuung am Kernfeld bezeichnend ist.

Scherzer dagegen benützt, um ψ_2 zu gewinnen. die nichtstationäre Dirac'sche Methode der Variation der Konstanten. Er nimmt an, daß zur Zeit $t = o$ der Zustand des Systems Elektron + Strahlungsfeld gegeben ist durch das Nichtvorhandensein von Strahlung und die Wellenfunktion ψ_1, d. h. die Wellenfunktion des elastisch gestreuten Elektrons. Infolge der Wechselwirkung mit der Strahlung kommt mit wachsender Zeit noch die Wellenfunktion ψ_2 dazu, die sich Scherzer nach Wellenfunktionen ψ entwickelt denkt. ψ ist eine Wellenfunktion, die ein in vorgegebener Richtung austretendes Elektron darstellt. Die Koeffi-

zienten der Entwicklung sind die Dirac'schen Wahrscheinlichkeitsamplituden für die betreffende Lichtemission. Diese Wahrscheinlichkeitsamplituden lassen sich in den elektrischen Momentenmatritzen M_x, M_y, M_z ausdrücken (vgl. Cl. Schäfer, Einf. in die theor. Phys. III/2, S. 429 und O. Scherzer aaO, S. 148). Die Rechnungen sind ziemlich umfangreich und deshalb wurden in § 3 sofort die endgültigen Formeln angegeben. Die Formel (3,2) stellt nun nicht, im Gegensatz zu den Rechnungen von Mott, eine Born'sche Näherung dar, sondern gilt für alle v, für die die nichtrelativistische Rechnung zulässig ist. Indem man dann die Bedingung $\alpha Z \ll \beta$ oder $\omega \to 0$ einführt, erhält man aus (3,2) die Formeln (3,6) oder (3,7) bzw. (3,25).

§ 6. Entwicklung der Bloch-Nordsieck'schen Formel nach Potenzen von α. Die Streuformel von Bethe-Heitler als erste Näherung.

1. Die Wahrscheinlichkeit für einen Uebergang, bei dem $N_{s\lambda}$ Lichtquanten der Art s, λ ausgesandt werden und sich das Elektron nach dem Uebergang in einer Richtung innerhalb des Raumwinkelelements $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ mit der Geschwindigkeit v' (Anfangsgeschwindigkeit v) bewegt, ist nach (5,19) gegeben durch:

$$(6,1)\qquad W(\mathfrak{v}, \mathfrak{o}, \mathfrak{v}', N_{s\lambda})\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$$

$$= \frac{\sin\vartheta d\vartheta d\varphi\; m_0^2\; v'}{4\pi^2 \hbar^4 G \left(1-\frac{v'^2}{c^2}\right)} |F(q)|^2 . \prod_{s\lambda} e^{-\frac{1}{2}(\sigma_{s\lambda}-\sigma'_{s\lambda})^2} \frac{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{s\lambda}-\sigma'_{s\lambda})^2\right]^{N_{s\lambda}}}{N_{s\lambda}!}$$

wobei (vgl. 5,15):

$$F(q) = G \int dV\; \tilde{\psi}(\mathfrak{v})\; U\; \psi(\mathfrak{v}')\; e^{+i\sum_{s\lambda} N_{s\lambda}(\mathfrak{k}_s, r)}$$

$$= \int dV \exp\left[\frac{-i}{\hbar}(q, r)\right] \tilde{u}(\mathfrak{v})\; U\; u(\mathfrak{v}')$$

mit:

$$(6,2)\qquad q = m_0\left[\frac{\mathfrak{v}}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} - \frac{\mathfrak{v}'}{\sqrt{1-\frac{v'^2}{c^2}}}\right] - \sum_{s\lambda} N_{s\lambda}\,\hbar\,\mathfrak{k}_s.$$

$\mathfrak{q}$ stellt (vgl. (4,1)) den an den Kern abgegebenen Impuls dar. Das Produkt $\prod_{s\lambda}$ in (6,1) ist zu erstrecken über alle Werte von $(\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})$ für die verschiedenen Ausbreitungsvektoren $\mathfrak{k}_s$ und für die verschiedenen Polarisationszustände λ d. h. über eine diskrete Mannigfaltigkeit, da ja der Periodizitätsbereich G zunächst von endlicher Größe angenommen wird. Erst beim späteren Grenzübergang $G \to \infty$ geht diese diskrete Mannigfaltigkeit in ein Kontinuum über. Zu jedem $(\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})$ gehört ein bestimmtes $N_{s\lambda}$, wobei natürlich beliebig viele dieser $N_{s\lambda}$ auch Null sein dürfen. Zu dem Produkt $\prod_{s\lambda}$ gehört also eine bestimmte Kombination der $N_{s\lambda}$.

2. Um nun die Ergebnisse von Bloch und Nordsieck mit den Ergebnissen von Mott, Scherzer, Sauter, Bethe-Heitler vergleichen zu können und vorhandene Zusammenhänge aufzuklären, wird auch für die Bloch-Nordsieck'sche Formel der Uebergang von der relativistischen Rechnungsweise zur nichtrelativistischen gemacht. Es ergibt sich mit der Vernachlässigung von β gegen 1:

$\mathfrak{q}_{\text{rel}} = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}' - \hbar \sum_{s\lambda} N_{s\lambda}\, \mathfrak{k}_s$; $\mathfrak{q}_{\text{n.r.}} = \mathfrak{p} - \mathfrak{p}'$ (vgl. o. S. 30).

$\psi_{\text{rel}} = \frac{1}{\sqrt{G}}\, u\, e^{\frac{i(\mathfrak{p},\mathfrak{r})}{\hbar}}$ u: vierkomponentige auf 1 normierte Amplitude; $u\,\tilde{u} = 1$

$\psi_{\text{n.r.}} = \frac{1}{\sqrt{G}}\, u\, e^{\frac{i(\mathfrak{p},\mathfrak{r})}{\hbar}}$ u: nunmehr einkomponentige auf 1 normierte Amplitude; $u\,\tilde{u} = 1$

Für $F(\mathfrak{q})$ erhält man:

$$(6,3) \qquad F(\mathfrak{q}) = \int dV\, e^{\frac{i}{\hbar}((\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}),\mathfrak{r})}\, \tilde{u}(\mathfrak{v})\, U\, u(\mathfrak{v}').$$

Das Integral (6,3) tritt auch bei Heitler[1]) und Sauter[2]) auf und sein Wert ist:

$$F(\mathfrak{q}) = \tilde{u}(\mathfrak{v})\, u(\mathfrak{v}')\, \frac{Z\, e^2\, (4\pi)\, \hbar^2}{|\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}|^2}.$$

1) W. Heitler aaO S. 153.

2) Fr. Sauter Ann. d. Phys. (V) 18 (1933) 486.

Damit ergibt sich, wenn man die Normierung von u ($\mathfrak{v}$) und u ($\mathfrak{v}'$) auf 1 berücksichtigt:

$$(6,4) \qquad |F(q)|^2 = \frac{Z^2 e^4 (4\pi)^2 \hbar^4}{|\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}|^4}.$$

3. Aus (6,1) erhält man durch Einsetzen von (6,4) und nach Division mit dem einfallenden Teilchenstrom $i_0 = \frac{v}{G}$:

$$(6,5) \qquad d\Phi_{s\lambda} = \frac{4 Z^2 e^4 m^2}{|\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}|^4} \frac{v'}{v} \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$$

$$\cdot \prod_{s\lambda} \exp\left[-\frac{1}{2}(\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})^2\right] \frac{\left[\frac{1}{2}(\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})^2\right]^{N_{s\lambda}}}{N_{s\lambda}!}$$

Ausdruck (6,5) stellt den Wirkungsquerschnitt dafür dar, daß ein Elektron von einer Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{v}'$ abgebremst wird und gleichzeitig je $N_{s\lambda}$ Lichtquanten der Sorte s, λ ausgesandt werden. Daraus kann man die Wahrscheinlichkeit berechnen, daß das Elektron von $\mathfrak{v}$ auf $\mathfrak{v}'$ abgebremst wird und dabei irgendwelche Lichtquanten ausgesandt werden. Man muß dann alle möglichen Endzustände, die angenommen werden können, betrachten und über all diese Zustände, d. h. über alle möglichen Kombinationen der $N_{s\lambda}$ summieren. Zunächst werde auf die Energiebeziehung

$$(6,6) \qquad E - E' = \sum_{s\lambda} N_{s\lambda} \hbar \omega_s$$

keine Rücksicht genommen. Einige Uebergänge zwischen dem Anfangszustand und den möglichen Endzuständen sollen angegeben werden. Der Anfangszustand sei charakterisiert durch $\mathfrak{v}$, o, d. h. das Elektron hat die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}$ und keine Lichtquanten sind vorhanden. Die möglichen Endzustände mögen charakterisiert werden durch $\mathfrak{v}'$, $N_{s\lambda}$, $N_{t\lambda}$, $N_{r\lambda}$, ... d. h. das Elektron hat nunmehr die Geschwindigkeit $\mathfrak{v}'$ und $N_{s\lambda}$ Lichtquanten der Sorte s, λ, $N_{t\lambda}$ Lichtquanten der Sorte t, λ, $N_{r\lambda}$ Lichtquanten der Sorte r, λ usf. sind vorhanden. Man kann

einzelne Uebergangsmöglichkeiten symbolisch andeuten durch nachstehende Schreibweise:

$$\mathfrak{v};\ o \to \mathfrak{v}';\ 1_{s1},\ o,\ 1_{t1},\ o \ldots$$

$$\mathfrak{v};\ o \to \mathfrak{v}';\ o,\quad o,\ 1_{t1},\ o \ldots$$

(6,7) $$\mathfrak{v};\ o \to \mathfrak{v}';\ 1_{s2},\ o,\ o,\quad o \ldots$$

allgemein:

$$\mathfrak{v};\ o \to \mathfrak{v}';\ N_{s1},\ N_{s2},\ N_{t1},\ N_{t2} \ldots.$$

Es gibt so viele Uebergangsmöglichkeiten als es mögliche Endzustände gibt und die Anzahl der möglichen Endzustände ist gleich der Anzahl der Kombinationen der Zahlen $N_{s\lambda}$, die ganz unabhängig voneinander jede beliebige natürliche Zahl darstellen können. Die Gesamtwahrscheinlichkeit $d\Phi$ für einen beliebigen Uebergang $\mathfrak{v} \to \mathfrak{v}'$ unter Aussendung irgendwelcher Lichtquanten erhält man durch Summation über all diese Kombinationen:

(6,8) $$d\Phi = \sum_{\text{Komb. } N_{s\lambda}} d\Phi_{s\lambda}$$

Schreibt man zur Abkürzung:

$$\frac{1}{2}(\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})^2 = f_{s\lambda},$$

so hat man im wesentlichen folgenden Ausdruck zu untersuchen:

(6,9) $$\sum_{\text{Komb. } N_{s\lambda}} \prod_{s\lambda} e - f_{s\lambda} \frac{f_{s\lambda}^{N_{s\lambda}}}{N_{s\lambda}!}$$

Statt des Doppelindex $s.\lambda$ werde vorübergehend zur Vereinfachung der Index μ gesetzt. Es besteht dann folgende Zuordnung:

$\sigma\lambda$:	11	12	21	22	31	32	....
μ:	1	2	3	4	5	6	....

allgemein: $\mu = 2\,(s-1) + \lambda$.

Der Faktor (6,9) wird dann:

(6,10) $$\sum_{\text{Komb. } N_\mu} \prod_{\mu} e^{-f_\mu} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!}.$$

Sofern auf die Energiebeziehung (6,6) keine Rücksicht genommen

wird, d. h. sofern die Anzahl N_μ der Lichtquanten $\hbar\,\omega_s$ und auch die Frequenz ω_s nicht begrenzt wird, gilt ganz allgemein:

$$(6{,}11)\qquad \sum_{\text{Komb. } N_\mu} \prod_{\mu} e^{-f_\mu} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!} = \prod_{\mu} e^{-f_\mu} \sum_{N_\mu=0}^{\infty} \left(\frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!}\right).$$

Denn (6,10) läßt sich wie folgt darstellen:

$$(6{,}10\,a)\qquad \sum_{\text{Komb. } N_\mu} \prod_{\mu} e^{-f_\mu} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!} = \sum_{\text{Komb. } N_\mu} e^{-f_1} \frac{f_1^{N_1}}{N_1!} \cdot e^{-f_2} \frac{f_2^{N_2}}{N_2!} \cdots e^{-f_\mu} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!} \cdots$$

und da die N_μ nicht begrenzt sind und unabhängig voneinander jeden beliebigen positiven ganzzahligen Wert annehmen können, kann man (6,10 a) auch schreiben in der Form:

$$(6{,}10\,b)\qquad \sum_{\text{Komb. } N_\mu} \prod_{\mu} e^{-f_\mu} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!} = e^{-f_1} \left(\sum_{N_1=0}^{\infty} \frac{f_1^{N_1}}{N_1!}\right) \cdot e^{-f_2} \left(\sum_{N_2=0}^{\infty} \frac{f_2^{N_2}}{N_2!}\right) \cdots$$

$$= \prod_{\mu} e^{-f_\mu} \sum_{N_\mu=0}^{\infty} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!}$$

Da $\displaystyle\sum_{N_\mu=0}^{\infty} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!} = e^{f_\mu}$ ist, folgt ferner:

$$\sum_{\text{Komb. } N_\mu} \prod_{\mu} e^{-f_\mu} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!} = 1.$$

4. Der Ausdruck (6,10) soll nun noch genauer untersucht werden, da später nicht über alle Kombinationen N_μ, sondern nur über die mit dem Energieprinzip (6,6) verträglichen summiert werden soll. Es erweist sich hiefür als zweckmäßig, den Ausdruck (6,10) nach der Sommerfeldschen Feinstrukturkonstanten α zu entwickeln, da ja die $f_\mu = \frac{1}{2}\,(\sigma_\mu - \sigma'_\mu)^2$ nach (5,5)

und (5,11) den Faktor $\alpha = \frac{e^2}{\hbar c}$ enthalten. Durch Entwicklung der e-Funktion in (6,10) ergibt sich:

$$(6{,}10\,c)\quad \sum_{\text{Komb. } N_\mu} \prod_{\mu} e^{-f_\mu} \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!}$$

$$= \sum_{\text{Komb. } N_\mu} \left(1 - f_1 + \frac{f_1^2}{2!} - \ldots\right) \frac{f_1^{N_1}}{N_1!} \left(1 - f_2 + \ldots\right) \frac{f_2^{N_2}}{N_2!}$$

$$\ldots \left(1 - f_\mu + \ldots\right) \frac{f_\mu^{N_\mu}}{N_\mu!} \ldots$$

Im Folgenden werden die f_μ, die in (6,10 c) in den Klammern $(\ldots)$ stehen, mit f_μ bezeichnet, da sie keinem wirklich ausgesandten Lichtquant zugeordnet sind. Man erhält, sofern wie in (6,11) die Beschränkung durch den Energiesatz weggelassen wird:

a) Glied ohne α:

alle $N_\mu = 0$;
kein Lichtquant wird ausgesandt.

Anzahl der Kombinationen $= 1$ und somit: $\Pi = 1 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 \ldots = 1$.

b) Glied mit α:

$\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu$ — ein $N_\mu = 1$, die andern 0 — } insgesamt 1 Quant

$-\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu$ — alle $N_\mu = 0$ — } insgesamt 0 Quanten

zusammen: $\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu - \sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu = 0$ als Wert für das Glied mit α.

c) Glied mit α^2:

$+\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f_\mu^2}{2!}$: ein $N_\mu = 2$; alle andern $N_\mu = 0$

$+\sum_{\nu=0}^{\infty} \sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{f_\nu f_\mu}{2}$ $(\nu \neq \mu)$: zwei $N_\mu = 1$; alle andern $N_\mu = 0$

} insgesamt 2 Quanten

$$-\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\underset{\text{zugel.}}{f_\nu \bar{f}_\mu}\ (\nu=\mu):\ \text{ein } N_\mu = 1;\ \text{alle andern } N_\mu = 0 \quad \Big\}\ \text{insgesamt 1 Quant}$$

$$+\sum_{\nu=0}^{\infty}\sum_{\mu=0}^{\infty}\underset{\text{zugel.}}{\frac{\bar{f}_\nu f_\mu}{2}}\ (\nu=\mu):\ \text{alle } N_{\nu'} = 0 \quad \Big\}\ \text{insgesamt 0 Quant}$$

Man kann nun so zusammenfassen:

$$\sum_{\nu}\sum_{\mu}\underset{\text{zugel.}}{\frac{f_\nu f_\mu}{2}}\ (\nu=\mu):\ 2 \text{ Quant ausgesandt}$$

$$-\sum_{\nu}\sum_{\mu}\underset{\text{zugel.}}{\bar{f}_\nu f_\mu}\ (\nu=\mu):\ 1 \text{ Quant ausgesandt}$$

$$\sum_{\nu}\sum_{\mu}\underset{\text{zugel.}}{\frac{f_\nu f_\mu}{2}}\ (\nu=\mu):\ 0 \text{ Quanten ausgesandt}$$

Addiert man, so ergibt sich der Wert o für das Glied mit α^2.

d) Glied mit α^3:

$$\sum_{\nu}^{\infty}\frac{f_\nu}{3!}:\ \text{ein } N_\nu = 3;\ \text{alle andern } N_\nu = 0$$

$$\sum_{\nu}\sum_{\tau}\frac{f_\nu^2 f_\tau}{2!}\ (\nu \neq \tau):\ \text{ein } N_\nu = 2;\ \text{ein } N_\nu = 1;\ \text{alle andern } N_\nu = 0$$

$$\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau}\frac{f_\nu f_\mu f_\tau}{2!}:\ \text{drei der } N_\nu = 1;\ \text{alle andern } N_\nu = 0$$

$$(\nu \neq \mu \neq \tau \neq \nu)$$

$$\Big\}\ \text{insgesamt 3 Quanten ausgesandt}$$

$$-\sum_{\nu}\sum_{\mu}\frac{f_\nu^2}{2!}\bar{f}_\mu\ (\nu \neq \mu):\ \text{ein } N_\nu = 2;\ \text{alle andern } N_\mu = 0$$

$$-\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau}\frac{\bar{f}_\nu f_\mu f_\tau}{2!}\ (\mu \neq \tau):\ \text{zwei der } N_\nu = 1;\ \text{alle andern } N_\nu = 0$$

$$\Big\}\ \text{insges. 2 Quant.}$$

$$+\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau}\frac{f_\nu f_\mu f_\tau}{2!}:\ \text{ein } N_\nu = 1;\ \text{alle andern } N_\nu = 0 \quad \Big\}\ \text{insges. 1 Quant}$$

$$-\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau}\frac{\bar{f}_\nu f_\mu \bar{f}_\tau}{3!}:\ \text{alle } N_\nu = 0 \quad \Big\}\ \text{insges. 0 Quant.}$$

Da nun $\frac{1}{3!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau$ (gleiche Indizes zugelassen)

$$-\frac{1}{3!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau \quad (\nu \neq \mu \neq \tau \neq \nu)$$

$$+3\cdot\frac{1}{3!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau \quad \left\{\begin{matrix}\nu=\mu;\ \nu\neq\tau\neq\mu\\ \mu=\tau;\ \mu\neq\nu\neq\tau\\ \nu=\tau;\ \nu\neq\mu\neq\tau\end{matrix}\right\};\ (3\text{ Möglichkeiten});$$

$$+1\cdot\frac{1}{3!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau \quad (\nu=\mu=\tau);\ (1\text{ Möglichkeit});$$

$$-\frac{1}{3!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau \quad (\nu \neq \mu \neq \tau \neq \nu)$$

$$+\frac{3}{3!}\sum_{\nu}\sum_{\mu} f_\nu^2 f_\mu \quad (\nu \neq \mu)$$

$$+\frac{1}{3!}\sum_{\mu} f_\mu^3 \quad \text{ist.}$$

kann man die Glieder mit α^3 nach folgender Anordnung zusammenfassen:

$$+\frac{1}{3!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau$$ 3 Quanten werden insgesamt ausgesandt

$$-\frac{1}{2!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau$$ 2 Quanten werden insgesamt ausgesandt

$$+\frac{1}{2!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau$$ 1 Quant wird ausgesandt

$$\frac{1}{3!}\sum_{\nu}\sum_{\mu}\sum_{\tau} f_\nu f_\mu f_\tau$$ 0 Quanten werden ausgesandt

Zusammengefaßt erhält man für das Glied mit α^3: 0.

e) Glied mit α^n:

Ganz entsprechend wie unter a) bis d) erhält man das Glied mit α^n:

$$+\frac{1}{n!}\sum\sum\cdots\sum\sum f_{\mu_1} f_{\mu_2}\ldots f_{\mu_n}$$ n Quanten ausgesandt

$$+ \frac{-1}{(n-1)!\,1!} \sum\sum \cdots \sum f_{\mu_1} f_{\mu_2} \ldots f_{\mu_{n-1}} \bar{f}_{\mu_n} \quad (n-1) \text{ Quanten}$$

. . . . . .

$$\frac{(-1)^m}{(n-m)!\,m!} \sum\sum \cdots \sum f_{\mu_1} \ldots f_{\mu_{n-m}} \bar{f}_{\mu_{n-m+1}} \ldots \bar{f}_{\mu_n}$$
$$(n-m) \text{ Quanten}$$

. . . . . .

$$\frac{(-1)^n}{0!\,n!} \sum\sum \cdots \sum \bar{f}_{\mu_1} \bar{f}_{\mu_2} \ldots \bar{f}_{\mu_{n-1}} \bar{f}_{\mu_n} \qquad 0 \text{ Quanten}$$

Zusammengefaßt ergibt sich für das Glied mit α^n:

$$\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{(n-m)!\,m!} \left(\sum \cdots \sum f\,f\,f \ldots f\right) = 0$$

Die Rechnung S. 53—56 zeigt also, daß der auf S. 53 erhaltene Wert 1 für die $\sum_{\text{Komb-N}_\mu} \prod_\mu$ bei einer Reihenentwicklung nach α folgendermaßen zustande kommt. Das absolute Glied liefert für sich allein schon den vollen Wert 1, alle andern Glieder der Reihe werden 0. Dies trifft zu unter der Voraussetzung, daß ohne Rücksicht auf den Energiesatz (6,6) über alle Kombinationen der N_μ summiert wird. Wird nachher nur über diejenigen Kombinationen der N_μ summiert, die mit dem Energiesatz verträglich sind, so wird sich zeigen, daß dann das absolute Glied der Reihenentwicklung wieder 1 wird, daß dagegen die weiteren Glieder in α, α^2, ... von Null verschieden sein werden.

5. Um die Summe über diejenigen Kombinationen der N_μ zu erhalten, die dem Energiesatz (6,6) für einen beliebigen Energieverlust

(6,12) $$\varepsilon = E - E'$$

genügen, gehen wir in zwei Stufen vor. Zunächst wird die Summe über diejenigen Kombinationen der N_μ angeschrieben, die einem Energieverlust zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ entsprechen (derartige Summen werden symbolisch durch $\sum_{d\varepsilon}$ charakterisiert). Diese Summe wird dann nachher über ε von $\varepsilon = 0$ bis $\varepsilon = E$ integriert. Die Stelle

$\varepsilon = 0$ wird vorläufig ausgeschlossen und später einer gesonderten Betrachtung unterworfen. Für die $\sum_{N_\mu \cdot d\varepsilon}$ d. h. die Summen über all diejenigen Kombinationen der N_μ, die einem Energieverlust aus dem Intervall $d\varepsilon$ entsprechen, kommen zunächst all die Glieder in Wegfall, bei denen 0 Quanten ausgesandt werden d. h. bei denen alle $N_\mu = 0$ sind. Es werden nun nach der Aufstellung S. 53—56 die Glieder zusammengefaßt, die der Aussendung eines Quants entsprechen. Dabei ist über die f_μ nach wie vor von 0 bis ∞ zu summieren, während über die f_μ nur innerhalb des Energieintervalls $d\varepsilon$ summiert wird. Für die Glieder, dieder Aussendung eines Quants entsprechen, muß gelten:

$$\varepsilon < \hbar\,\omega_\nu < \varepsilon + d\varepsilon$$

Die Summe dieser Glieder ist:

$$(6{,}13)\quad \sum_{d\varepsilon} f_\nu - \sum_0^\infty \bar{f}_\mu \sum_{d\varepsilon} f_\nu + \frac{1}{2!}\sum_0^\infty f_\mu \sum_0^\infty f_\tau \sum_{d\varepsilon} f_\nu - + \ldots$$

$$= \sum_{d\varepsilon} f_\nu \left[1 - \Sigma \bar{f}_\mu + \frac{(\Sigma \bar{f}_\mu)^2}{2!} - \frac{(\Sigma \bar{f}_\mu)^3}{3!} + \ldots\right]$$

$$= \sum_{d\varepsilon} f_\mu\, e^{-\sum_0^\infty f_\mu}$$

Für die Glieder, die der Aussendung zweier Quanten mit den Frequenzen ω_ν und ω_μ entsprechen, muß nach dem Energiesatz gelten:

$$\varepsilon < \hbar\,(\omega_\mu + \omega_\nu) < \varepsilon + d\varepsilon.$$

Die Summe dieser Glieder ist:

$$(6{,}14)\quad \frac{1}{2!}\sum_{d\varepsilon} f_\nu\, f_\mu \left(1 \quad (\Sigma \bar{f}) + \frac{(\Sigma f)^2}{2!} - \frac{(\Sigma \bar{f})^3}{3!} + \ldots.\right)$$

$$= \frac{1}{2!}\sum_{d\varepsilon} f_\nu\, f_\mu\, e^{\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu}$$

$\sum_{d\varepsilon} f_\nu\, f_\mu$ bedeutet hier, daß über alle Kombinationen von f_ν und f_μ zu summieren ist, die der vorstehenden Energiebedingung genügen. Ganz entsprechend wird die Summe derjenigen Glieder, die der Aussendung von 3 Quanten entsprechen:

(6,15) $$\frac{1}{3!}\sum_{d\varepsilon} f_\nu f_\mu f_\varrho \, e^{-\sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{f}_\tau}$$

mit der Bedingung:

$$\varepsilon < \hbar(\omega_\nu + \omega_\mu + \omega_\varrho) < \varepsilon + d\varepsilon$$

Die Glieder mit n Quanten ergeben zusammengefaßt:

(6,16) $$\frac{1}{n!}\sum_{d\varepsilon} f_{\mu_1} f_{\mu_2} \ldots f_{\mu_n} \, e^{-\sum_{\tau=0}^{\infty} \bar{f}_\tau}$$

mit der Bedingung:

$$\varepsilon < \hbar \Sigma \omega < \varepsilon + d\varepsilon.$$

Würde man nun all diese Summen über ε von 0 bis ∞ integrieren, so würde man, wie nach den Entwicklungen (6,10 b) ff. zu ersehen ist, den Wert 1 erhalten. Man faßt zu dem Zweck die Ausdrücke (6,13) bis (6,16) zusammen und berücksichtigt auch diejenigen Glieder, die der Aussendung von 0 Quanten zugeordnet sind, für die also alle $N_\mu = 0$ sind. Diese „Nullglieder" sind nach (6,10), sowie nach den Aufstellungen von S. 53—56 anzugeben mit:

$$e^{-\Sigma \bar{f}_\mu} = 1 - \Sigma f_\mu + \frac{1}{2!}(\Sigma f_\mu)^2 - \ldots$$

Damit ergibt sich dann:

(6,17) $$e^{-\sum_{\nu=0}^{\infty} \bar{f}_\nu}\left(1 + \sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu + \frac{1}{2!}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu\right)^2 + \frac{1}{3!}\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu\right)^3 + \ldots\right)$$
$$= e^{-\sum_{\nu=0}^{\infty} f_\nu} \, e^{\sum_{\mu=0}^{\infty} f_\mu} = 1.$$

Betrachtet man dagegen nur die Ausstrahlung von Lichtquanten, die einen Energieverlust aus dem Intervall $d\varepsilon$ ergeben, so ist die Summe über die Ausdrücke (6,13) bis (6,16) hiefür maßgebend d. h. der Wirkungsquerschnitt $d\Phi_{d\varepsilon}$ für einen Stoß, bei dem ein Energieverlust zwischen ε und $\varepsilon + d\varepsilon$ auftritt, wird:

(6,18) $$d\Phi_{d\varepsilon} = \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi \, \frac{4 Z^2 e^4 m^2}{|p' - p|^4} \frac{v'}{v} \, e^{-\sum_{0}^{\infty} \bar{f}_\mu} \left(\sum_{d\varepsilon} f_\nu + \frac{1}{2!}\sum_{d\varepsilon} f_\nu f_\mu + \frac{1}{3!}\sum_{d\varepsilon} f_\nu f_\mu f_\tau + \ldots\right)$$

Während in den Summen $\sum_{d\varepsilon}$ über die betreffenden wirklich ausgestrahlten Frequenzen summiert wird, erstreckt sich die Summe im Exponenten der e-Funktion über das unendlich ausgedehnte (zunächst diskrete) Frequenzspektrum des Strahlungsfeldes. Man muß nun in der Methode von Bloch und Nordsieck, um ein Unendlichwerden dieser Summe infolge der unendlichen Ausdehnung des Frequenzspektrums (die in diesen Fällen immer auftretende Ultraviolettschwierigkeit) zu vermeiden, das Frequenzspektrum bei einer endlichen Grenze ω^* willkürlich abbrechen, wobei ω^* gewissen Ungleichungen zu genügen hat, über die im § 8 noch gesprochen wird; ferner ersetzen wir vorläufig die untere Grenze 0 der Summation durch eine sehr kleine Frequenz ω_0, mit der später zur Grenze 0 übergegangen wird.

Es ist also statt $\sum_{0}^{\infty} f_\nu$ $\sum_{\omega_0}^{\omega^*} f_\nu$ einzuführen und statt Gleichung (6,18) ist zu schreiben:

$$(6{,}19) \quad d\Phi_{d\varepsilon} = \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \frac{4\, Z^2\, e^4\, m^2}{|\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}|^4} \frac{v'}{v} e^{-\sum_{\omega_0}^{\omega^*} f_\mu} \left(\sum_{d\varepsilon} f_\nu + \frac{1}{2!} \sum_{d\varepsilon} f_\nu f_\mu + \ldots\right).$$

Die wesentliche Aufgabe ist nun, die $\sum_{d\varepsilon} \ldots$ in (6,19) auszurechnen. Die Klammer in (6,19) stellt bereits eine Reihenentwicklung nach α dar. Die vor der Klammer stehende e-Potenz kann ebenfalls leicht in eine Reihe nach α entwickelt werden, so daß dann auch der Wirkungsquerschnitt $d\Phi_{d\varepsilon}$ als Reihenentwicklung nach α erscheint.

Für die Ausrechnung der $\sum_{d\varepsilon} \ldots$ ist zu beachten, daß über sämtliche Kombinationen der f_μ, die der jeweils zugehörigen Energiebedingungen genügen, zu summieren ist d. h. jeweils über sämtliche Richtungen der Ausbreitungsvektoren $\mathfrak{k}_s$, über je zwei zueinander senkrecht stehende Polarisationszustände und über die mit den Energiebedingungen verträglichen Frequenzkombinationen. Man kann sich überzeugen, daß man über alle mög-

lichen Zustände in Bezug auf die Austrittsrichtungen und Polarisationszustände summiert, wenn man einfach in den f_μ über die Polarisationszustände λ und über die Austrittsrichtungen der einzelnen Lichtquanten summiert. Man erhält dann (vgl. § 4, S. 35).

$$\sum_\lambda f_{s\lambda} = \sum_\lambda \frac{1}{2!} (\sigma_{s\lambda} - \sigma'_{s\lambda})^2$$

$$= \frac{2\pi e^2}{\hbar\, G c^2} \frac{1}{\omega_s\, k^2_s} [(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}')^2 - (\mathfrak{v}_s - \mathfrak{v}_s')^2].$$

Durch eine einfache Umformung erhält man:

$(\mathfrak{v} - \mathfrak{v}')^2 - (\mathfrak{v}_s - \mathfrak{v}'_s)^2] = v^2 \sin^2\Theta + v'^2 \sin^2\Theta' - 2\, vv' \sin\Theta \sin\Theta' \cos\Psi.$

Die Anzahl der Strahlungskomponenten, die in ein Frequenzintervall $d\omega_s$ und in ein Raumwinkelelement $\sin\Theta d\Theta d\chi$ fallen, ist gleich:

$$\frac{G}{(2\pi c)^3}\, \omega_s^2\, d\omega_s \sin\Theta d\Theta d\chi. \tag{6,20}$$

Da nun über alle Richtungen von $\mathfrak{k}_s$ zu integrieren ist, hat man dieselbe Integration durchzuführen wie auf S. 32 und es ergibt sich:

$$\sum_\lambda \int_s f_\mu = \frac{2}{3\pi} \frac{e^2}{c^3 \hbar} \frac{d\omega}{\omega} \cdot \varphi(\varepsilon), \tag{6,21}$$

wobei:

$$\varphi(\varepsilon) = v^2 + v'^2 - 2\, v\, v' \cos\vartheta. \tag{6,22}$$

Mit (6,21) und (6,22) ergibt sich aus (6,19), wenn man die e-Potenz nach α entwickelt und die Summen durch Integrale ersetzt:

$$d\Phi_{d\varepsilon} = \frac{4\, Z^2\, e^4\, m^2}{|\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}|^4} \frac{v'}{v} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi \tag{6,23}$$

$$\cdot \left(1 - \alpha a \int_{\omega_0}^{\omega^*} \frac{\varphi(\varepsilon) d\omega}{\omega} + \frac{\alpha^2 a^2}{2!} \left(\int_{\omega_0}^{\omega^*} \frac{\varphi(\varepsilon) d\omega}{\omega} \right)^2 - + \ldots \right)$$

$$\cdot \left(\alpha a \frac{\varphi(\varepsilon) d\omega}{\omega} + \frac{\alpha^2 a^2}{2!} (\varphi(\varepsilon))^2 \int_{d\varepsilon} \frac{d\omega_1}{\omega_1\, \omega_2}\, d\omega + \ldots \right),$$

wobei $d\omega = \frac{1}{\hbar} d\varepsilon$ das Energieintervall charakterisiert und

$\int_{d\varepsilon} \frac{d\omega_1}{\omega_1 \omega_2}$ bedeutet, daß über diejenigen Kombinationen von ω_1 und ω_2 zu integrieren ist, welche die Energiebedingung

$$\varepsilon \leq \hbar (\omega_1 + \omega_2) \leq \varepsilon + d\varepsilon$$

erfüllen.

Es ist ferner:

$\alpha = e^2 / \hbar c$ die Sommerfeldsche Feinstrukturkonstante,

$a = \frac{4}{3} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{c^2}$.

In (6,23) gibt $d\Phi_{d\varepsilon}$ die Wahrscheinlichkeit an, daß ein Elektron von seiner Anfangsgeschwindigkeit v auf v' abgebremst und in das Raumwinkelelement $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ gestreut wird, während gleichzeitig ein Energieverlust aus dem Bereich von ε bis $\varepsilon + d\varepsilon$ in der Form von 1, 2 oder mehreren ausgesandten Lichtquanten eintritt.

6. Berücksichtigt man in (6,23) nur Glieder mit α, so erhält man in Uebereinstimmung mit der Bethe-Heitler'schen Formel (4,10) als differentiellen Wirkungsquerschnitt:

$$(6,24)\quad d\Phi = \frac{Z^2 e^4 \alpha}{c^2} \frac{8}{3\pi} \frac{d\omega}{\hbar\omega} \frac{p_1''}{p} \frac{\sin\vartheta d\vartheta d\varphi}{(p^2 + p'^2 - 2p p' \cos\vartheta)}.$$

Die Bethe-Heitler'sche Formel (4,10) ist also das in α lineare Glied einer Reihenentwicklung der Bloch-Nordsieck'schen Formel nach α.

§ 7. Differentieller Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons unter Berücksichtigung der Ausstrahlung.

1. Um die Wahrscheinlichkeit zu berechnen, daß ein Elektron unter Berücksichtigung der möglichen Ausstrahlung um den Winkel ϑ abgelenkt wird, hat man $d\Phi_{d\varepsilon}$ über ε zu integrieren.

Benützt man wieder die kleine Energie $E_0 = \hbar\omega_0$, mit der später zur Grenze 0 übergegangen wird, und integriert dann über ε zwischen den Grenzen E_0 und $E_g = \hbar\,\omega_g$ (Grenzenergie), so erhält man aus (6,23):

$$(7{,}1)\qquad \int_{E_0}^{E_g} d\Phi_{d\varepsilon} = \frac{4\,Z^2\,e^4}{|\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}|^4}\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi \int_{\omega_0}^{\omega_g} \frac{v'}{v}\,[\alpha\,a\,\frac{\varphi(\varepsilon)}{\omega}$$

$$+ \frac{\alpha^2\,a^2\,(\varphi(\varepsilon))^2}{2!}\int_{d\varepsilon}\frac{d\omega_1}{\omega_1\,\omega_2} - \alpha^2\,a^2\,\frac{(\varphi(\varepsilon))^2}{\omega}\int_{\omega_0}^{\omega^*}\frac{d\omega}{\omega}$$

$$+ \alpha^3\,a^3\,(\ldots) + \ldots]\,d\omega$$

Zwischen ε und ω gilt die Beziehung:

$$\hbar\,\omega = \varepsilon \text{ und } \hbar\,d\omega = d\varepsilon.$$

Da nun aber nach (6,21)

$$\frac{1}{|\mathfrak{p}' - \mathfrak{p}|^4} = \frac{1}{m^4\,(\varphi(\varepsilon))^2} \quad \text{ist,}$$

kann man statt (7,1) auch schreiben:

$$(7{,}1\,a)\qquad \int_{E_0}^{E_g} d\Phi_{d\varepsilon} = \frac{4\,Z^2\,e^4}{m^2}\,\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi \int_{\omega_0}^{\omega_g}\frac{v'}{v}\,[\alpha\,a\,\frac{1}{\omega\,(\varphi(\varepsilon))}$$

$$+ \frac{\alpha^2\,a^2}{2!}\int_{d\varepsilon}\frac{d\omega_1}{\omega_1\,\omega_2} - \alpha^2\,a^2\int_{\omega_0}^{\omega^*}\frac{d\omega}{\omega}\cdot\frac{1}{\omega}$$

$$+ \alpha^3\,a^3\,(\ldots) + \ldots]\,d\omega$$

Für den gesamten Wirkungsquerschnitt sind auch diejenigen Glieder zu berücksichtigen, die der Aussendung von 0 Quanten zugeordnet sind, für die also alle $N_\mu = 0$ sind (vgl. S. 59).

$$e^{-\Sigma f_\mu} = 1 - \Sigma\,f_\mu + \frac{1}{2!}\,(\Sigma\,f_\mu)^2 - \ldots$$

$$= 1 - \alpha\,a\,\varphi(o)\int_{\omega_0}^{\omega^*}\frac{d\omega}{\omega} + \frac{\alpha^2\,a^2\,[\varphi(o)]^2}{2!}\left(\int_{\omega_0}^{\omega^*}\frac{d\omega}{\omega}\right)^2 - \ldots.$$

Der zusätzliche Ausdruck, der zu (7,1 a) hinzuzufügen ist, wird daher:

$$(7,2)\qquad \frac{4\,Z^2\,e^4}{[\varphi(o)]^2\,m^2}\sin\vartheta\,d\vartheta\,\varphi\,(1 \quad \alpha a\varphi(o)\int_{\omega_0}^{\omega^*}\frac{d\omega}{\omega}$$

$$+\frac{\alpha^2\,a^2\,[\varphi(o)]^2}{2!}\left(\int_{\omega_0}^{\omega^*}\frac{d\omega}{\omega}\right)^2 - +\ldots.),$$

da ja für den Energieverlust O: $v' = v$ und in $\varphi(\varepsilon)$ $\varepsilon = o$ gesetzt werden muß. Aus (7,1 a) und (7,2) ergibt sich nunmehr der gesamte Wirkungsquerschnitt:

$$(7,3)\qquad d\Phi_1 = \int_o^{E_g} d\Phi_{d\varepsilon} \quad \frac{4\,Z^2\,e^4}{m^2}\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi\,[\frac{1}{[\varphi(o)]^2} - \frac{\alpha\,a}{\varphi(o)}\int_{\omega_O}^{\omega^*}\frac{d\omega}{\omega}$$

$$+\alpha\,a\int_{\omega_o}^{\omega_g}\frac{v'}{v}\frac{}{\varphi(\varepsilon)}\frac{1}{\omega}\,d\omega + \frac{\alpha^2\,a^2}{2!}\left(\int_{\omega_o}^{\omega_*}\frac{d\omega}{\omega}\right)^2$$

$$+\frac{\alpha^2\,a^2}{2!}\int_{\omega_o}^{\omega_g}\left\{\frac{v'}{v}\int_{d\varepsilon}\frac{d\omega_1}{\omega_1\,\omega_2}\right\}d\omega - \alpha^2\,a^2\int_{\omega_o}^{\omega_g}\frac{v'}{v}\frac{d\omega}{\omega}\cdot\int_{\omega_o}^{\omega_*}\frac{d\omega}{\omega}$$

$$+\alpha^3\,(\ldots) + \ldots \qquad \text{mit Grenzübergang } \omega_0 \to o.$$

Hierbei ist:

$$\varphi(o) = 2\,v^2\,(1 - \cos\vartheta) = 4\,v^2\sin^2\frac{\vartheta}{2}.$$

Damit ergibt sich aus (7,3):

$$(7,3\,a)\qquad d\Phi_1 = \int_o^{E_g} d\Phi_{d\varepsilon} = \frac{4\,Z^2\,e^4}{m^2}\,\frac{\sin\vartheta\,d\vartheta\,d\varphi}{16\,v^4\sin^4\vartheta/_2}$$

$$+\alpha\,(\ldots) + \alpha^2\,(\ldots.).$$

Das von α freie Glied stellt genau die Rutherfordstreuformel dar (vgl. (2,1)).

(7,3) und (7,3a) stellt die Wahrscheinlichkeit dar, daß ein Elektron unter Berücksichtigung der möglichen Ausstrahlung, d. h. gleichgültig ob das Elektron elastisch oder unelastisch gestreut wird, in einen Raumwinkelbereich $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ abgelenkt wird.

2. Berechnung des Gliedes mit α a. Nach (7,3) sind nachstehende Integrale zu lösen:

$$(7,4)\qquad \int_{\omega_0}^{\omega_g} \frac{v'}{v}\,\frac{d\omega}{\omega\,(v^2+v'^2-2\,v\,v'\cos\vartheta)} - \int_{\omega_0}^{\omega_*} \frac{d\omega}{\omega\;4\;v^2\sin^2\vartheta/_2} = J_1 + J_2$$

Beim Grenzübergang $\omega_0 \to o$ würde jedes dieser beiden Integrale unendlich werden. Die Summe beider Integrale bleibt dagegen, wie sich leicht sehen läßt, endlich, da in der Grenze $\omega_0 \to o$, $v' \to v$ und $(v^2 + v'^2 - 2\,v\,v'\cos\vartheta) \to 4\,v^2\sin^2\vartheta/_2$ geht, so daß sich die beiden Integrale bis auf einen endlichen Betrag kompensieren. Die Ultrarotschwierigkeit wird also hier dadurch vermieden, daß das der Mott'schen Formel entsprechende erste Integral durch ein weiteres Integral J_2, welches in der Bloch- Nordsieck'schen Methode aus den „Nullgliedern" stammt, bis auf einen endlichen Betrag kompensiert wird. Für die Ausrechnung der Summe $J_1 + J_2$ ist es zweckmäßig, das Integral J_2 zu zerlegen in die Summe zweier Integrale $J_{21} + J_{22}$, wobei:

$$J_{21} = -\int_{\omega_0}^{\omega_g} \frac{d\omega}{\omega\;4\;v^2\sin^2\vartheta/_2},$$

$$J_{22} = -\int_{\omega_g}^{\omega^*} \frac{d\omega}{\omega\;4\;v^2\sin^2\vartheta/_2} \quad \text{ist.}$$

Man kann die Integranden von J_1 und J_{21} zusammenfassen, wodurch ein auch für $\omega_0 \to o$ endliches Integral entsteht.

Man setzt:

$$\omega = \frac{m}{2\hbar}(v^2 - v'^2) = \frac{m}{2\hbar}(v - v')\,(v + v')$$

$$d\omega = -\frac{m}{\hbar}\,v'\,dv'$$

und weiter:

$$z = v - v';\quad dz = -dv'.$$

Somit wird:

$$J_1 = \int_{z_0 \to 0}^{v} \frac{2\,(v-z)^2\,dz}{v\,z\,(2v-z)\,[z^2 - 2\,z\,v\,(1-\cos\vartheta) + 2\,v^2\,(1-\cos\vartheta)]}$$

Durch Zerlegung in Partialbrüche gewinnt man:

$$J_1 = \int_{z_0 \to 0}^{v} \frac{dz}{2\,v^2}\left[\frac{1}{(1-\cos\vartheta)\,z} + \frac{1}{(1+\cos\vartheta)\,(2\,v-z)}\right.$$

$$\left. - 2\,\frac{\cos\vartheta\cdot z + v\,(1-\cos\vartheta)}{\sin^2\vartheta\,[z^2 - 2\,z\,v\,(1-\cos\vartheta) + 2\,v^2\,(1-\cos\vartheta)]}\right]$$

$$J_2 = -\int_{\omega_0}^{\omega_g} \frac{d\omega}{\omega\,4\,v^2\sin^2\vartheta_{/2}} - \int_{\omega_g}^{\omega^*} \frac{d\omega}{\omega\,4\,v^2\sin^2\vartheta_{/2}} = J_{21} + J_{22};$$

$$J_{21} = -\int_{z_0 \to 0}^{v} \frac{2\,(v-z)\,dz}{z\,(2\,v-z)\,4\,v^2\sin^2\vartheta_{/2}}$$

$$= -\int_{z_0 \to 0}^{v} \frac{1}{4}\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{2v-z}\right)\frac{dz}{v^2\sin^2\vartheta_{/2}};$$

$$J_1 + J_2 = \int_{z_0 \to 0}^{v} dz\left(\frac{1}{v^2\sin^2\vartheta\,(2v-z)}\right.$$

$$\left. - \frac{\cos\vartheta\,z + v\,(1-\cos\vartheta)}{v^2\sin^2\vartheta\,[z^2 - 2\,zv\,(1-\cos\vartheta) + 2v^2\,(1-\cos\vartheta)]}\right) - \int_{\omega_g}^{\omega^*} \frac{d\omega}{\omega}\,\frac{1}{4\,v^2\sin^2\vartheta_{/2}}$$

Nun kann man zur Grenze $z_0 \to o$ übergehen und es ist:

$$\int_o^v \frac{dz}{(2v-z)} = -\left| \ln (2v - z) \right|_o^v = \ln \frac{2v}{v} = \ln 2$$

und:

$$\int_o^v \frac{\cos\vartheta\, z + v\,(1-\cos\vartheta)}{[z^2 - 2\,v\,z\,(1-\cos\vartheta) + 2\,v^2\,(1-\cos\vartheta)]}\, dz =$$

$$= -\frac{\cos\vartheta}{2} \ln \left| z^2 - 2\,v\,z\,(1-\cos\vartheta) + 2\,v^2\,(1-\cos\vartheta) \right|_o^v$$

$$+ v \sin^2\vartheta \int_o^v \frac{dz}{z^2 - 2\,v\,z\,(1-\cos\vartheta) + 2\,v^2\,(1-\cos\vartheta)}$$

$$= -\cos\vartheta \ln (2 \sin \vartheta/_2) + J_3$$

$$J_3 = v \sin^2\vartheta \int_o^v \frac{dz}{z^2 - 2\,v\,z\,(1-\cos\vartheta) + 2\,v^2\,(1-\cos\vartheta)}$$

$$= \sin\vartheta \left\{ \operatorname{arctg} \frac{\cos\vartheta}{\sin\vartheta} - \operatorname{arctg} \left(-\frac{1-\cos\vartheta}{\sin\vartheta}\right)\right\}$$

$$= \sin\vartheta \left\{ \operatorname{arctg} \left[\operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \vartheta\right)\right] - \operatorname{arctg} \left(-\operatorname{tg} \frac{\vartheta}{2}\right)\right\}$$

$$= \frac{\sin\vartheta}{2} (\pi - \vartheta)$$

Zusammengefaßt ergibt sich:

$$(7{,}4\,a)\quad J_1 + J_2 = \frac{1}{v^2 \sin^2\vartheta} \left[2 \ln 2 \cos^2 \frac{\vartheta}{2} + \cos\vartheta \ln \left(\sin \frac{\vartheta}{2}\right) - \frac{\sin\vartheta}{2} (\pi - \vartheta)\right] - \frac{1}{4\,v^2 \sin^2 \vartheta/_2} \ln \frac{\omega^*}{\omega_g}.$$

Um festzustellen, welches Glied in (7,4 a) von ausschlaggebender

Bedeutung ist, ist es notwendig, zunächst die Größenordnung von $\ln \frac{\omega^*}{\omega_g}$ zu kennen. Nach S. 77 (8,14) ist zu setzen:

(7,5) $$\hbar\,\omega^* \approx m_0\, c^2 .$$

Andererseits ist:

$$\hbar\,\omega_g = \frac{m_0}{2}\, v^2 .$$

Daraus folgt:

(7,6) $$\ln \frac{\omega^*}{\omega_g} \approx 2\ \ln \frac{c}{v} .$$

Für $v \approx \frac{c}{10}$ hat $2 \ln (c/v)$ ungefähr den Wert 4. Da man nun $\sin^2 \vartheta = 4 \sin^2 \vartheta/2 \cos^2 \vartheta/2$ setzen kann, ist (vgl. (7,4a)) der Ausdruck

$$A(\vartheta) = \frac{1}{\cos^2 \vartheta/2} \left[2 \ln 2 \cos^2 \vartheta/2 + \cos \vartheta \ln (\sin \vartheta/2) - \frac{\sin \vartheta}{2} (\pi - \vartheta)\right]$$

zu vergleichen mit dem Logarithmusglied

$$\ln \frac{\omega^*}{\omega_g} \approx 2 \ln \left(\frac{c}{v}\right).$$

Zeichnet man die Winkelabhängigkeit von $A(\vartheta)$ graphisch auf, so findet man (vgl. Fig. 3, S. 80), daß für $\vartheta > 20^0$ (und das sind die praktisch vorkommenden Fälle) $|A(\vartheta)| < 1$ ist, für ϑ zwischen 90^0 und 180^0 ist $|A(\vartheta)| \approx 0{,}1$. Daraus ist ersichtlich, daß das Logarithmusglied stark überwiegt. Der Ausdruck in (7,3 a), der proportional α ist, läßt sich daher angenähert darstellen in der Gestalt:

(7,7) $$-\frac{2}{3} \frac{Z^2 e^6 \sin \vartheta\, d\vartheta\, \varphi}{\pi \hbar c^3 m^2 v^2 \sin^2 \vartheta/2} \ln \frac{\omega^*}{\omega_g} .$$

3. Bei der Berechnung des Gliedes mit α^2 treten nachstehende Integrale $C \cdot J'_1$, $C \cdot J'_2$ und $C \cdot J'_3$ auf (vgl. (7,3)).

$$C \cdot J'_1 = \frac{C}{2!}\left(\int_{\omega_0}^{\omega^*} \frac{d\omega}{\omega}\right)^2 ; \left(C = \frac{4\, Z^2\, e^4}{m^2} \sin\vartheta\, d\vartheta\, d\varphi\, \alpha^2\, a^2\right)$$

entspricht in (7,3) der Aussendung von 0 Quanten. ω sind Kreisfrequenzen des „virtuellen" Spektrums mit ω^* als Grenzfrequenz.

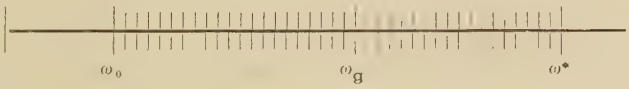
$$C \cdot J'_2 = \frac{C}{2!}\int_{\omega_0}^{\omega_g}\left\{\frac{v'}{v}\int_{d\varepsilon}\frac{d\omega_1}{\omega_1\ \omega_2}\right\}\ d\omega$$

ist einem Vorgang zugeordnet, bei dem 2 Quanten $\hbar\omega_1$ und $\hbar\omega_2$ emittiert werden, für die $\varepsilon \leq \hbar\,(\omega_1 + \omega_2) \leq (\varepsilon + d\varepsilon)$ und $\hbar\omega_0 \leq \varepsilon \leq \hbar\,\omega_g$ ist.

$$C \cdot J'_3 = \quad C \int_{\omega_0}^{\omega_g} \frac{v'}{v}\ \frac{d\omega}{\omega} \cdot \int_{\omega_0}^{\omega^*} \frac{d\omega}{\omega}$$

entspricht der Aussendung e i n e s Lichtquants $\hbar\,\omega$, für das $\hbar\omega_0 \leq \hbar\,\omega \leq \hbar\,\omega_g$ ist.

Für die untere Grenze ist später der Grenzübergang $\omega_0 \to o$ zu machen. Man nimmt zunächst ein Frequenzspektrum an (vgl. Figur), bei dem ω_0 die kleinstmögliche Kreisfrequenz ist. Begrenzt wird das Spektrum nach oben durch die Grenzfrequenz ω^*, ω_g liegt zwischen ω_0 und ω^*, wie in § 8 gezeigt wird.



Unter Zugrundelegung eines solchen Frequenzspektrums ist die kleinstmöglich ausgestrahlte Energie $E_{min} = \hbar\,\omega_0$, sofern 1 Lichtquant ausgesandt wird. Werden gleichzeitig 2 Quanten ausgesandt, so ist die kleinstmöglich ausgestrahlte Energie $E_{min} = 2\,\hbar\,\omega_0$. Ist die Grenzenergie $E_g = \frac{m}{2} v^2$ vorgegeben, so kann, so-

fern 1 Quant ausgesandt wird, letzteres die Kreisfrequenz $\omega_{max} = \omega_g$ annehmen. Werden jedoch 2 Lichtquanten gleichzeitig ausgesandt, so ist die höchste Kreisfrequenz, die eines der beiden Lichtquanten annehmen kann, bestimmt durch $\omega_{max} = \omega_g - \omega_0$, da ja $\hbar\omega_g \quad \hbar(\omega_{max} + \omega_0) = E_g$ erfüllt sein muß. Darauf ist bei der Integration zu achten, wenn man zunächst ω_0 als kleinstmögliche Frequenz einführt. Die Integrale J'_2 und J'_3 lassen sich nicht geschlossen ausführen. Es genügt jedoch schon, einen Ueberblick über die Größenordnung der genannten Integrale zu erhalten. Dies kann man mit geringer Mühe erreichen, wenn man an Stelle von J_2' und J_3' die Integrale

$$J_2'' = \frac{1}{2}\int_{\omega_0}^{\omega_g}\left[\int_{d\varepsilon}\frac{d\omega_1}{\omega_1\,\omega_2}\right]d\omega$$

$$J''_3 = -\int_{\omega_0}^{\omega_g}\frac{d\omega}{\omega}\cdot\int_{\omega_0}^{\omega^*}\frac{d\omega}{\omega}$$

berechnet. J''_2 und J''_3 unterscheiden sich von J'_2 und J'_3 dadurch, daß man ν'/ν durch 1 ersetzt hat. In J''_2 will $\int_{d\varepsilon}\frac{\omega_1\cdot\omega_2}{d\omega_1}$ besagen: Man hat über all die Ausdrücke $\frac{d\omega_1}{\omega_1\cdot\omega_2}$ zu integrieren, für die $\omega_1 + \omega_2 = \omega = \frac{\varepsilon}{\hbar}$ ist. Betrachtet man ω_1 als variabel, so ist $\omega_2 = \omega - \omega_1$ und es wird:

$$(7{,}8)\qquad \int_{d\varepsilon}\frac{d\omega_1}{\omega_1\,\omega_2} = \int_{\omega_0}^{\omega-\omega_0}\frac{d\omega_1}{\omega_1(\omega-\omega_1)} = \int_{\omega_0}^{\omega-\omega_0}\frac{1}{\omega}\left(\frac{1}{\omega_1}+\frac{1}{\omega-\omega_1}\right)d\omega_1$$

$$= \frac{1}{\omega}\,2\,(\ln(\omega-\omega_0) - \ln\omega_0).$$

Gl. (7,8) eingesetzt in J''_2 ergibt:

$$2\,J''_2 = 2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{\ln(\omega-\omega_0)-\ln\omega_0}{\omega}\,d\omega$$

$$= 2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{\ln(\omega-\omega_0)}{\omega}\,d\omega - 2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{\ln\omega_0}{\omega}\,d\omega = J_4 + J_5$$

Es ist: $J_5 = 2\ln\omega_0(\ln(2\omega_0) - \ln\omega_g)$.
J_4 läßt sich nicht geschlossen ausdrücken. Man macht zweckmäßig folgende Zerlegung:

$$J_4 = 2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{\ln(\omega-\omega_0)}{\omega}\,d\omega = 2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{\ln\left[\omega\left(1-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\right]}{\omega}\,d\omega$$

$$= 2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{\ln\omega}{\omega}\,d\omega + 2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{\ln\left(1-\frac{\omega_0}{\omega}\right)}{\omega}\,d\omega = J_6 + J_7$$

J_6 läßt sich geschlossen auswerten; bei J_7 kann man, da $\left|\frac{\omega_0}{\omega}\right| \leq \frac{1}{2}$ ist, $\ln\left(1-\frac{\omega_0}{\omega}\right)$ in eine Reihe entwickeln und erhält dann:

$$J_6 = 2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{\ln\omega}{\omega}\,d\omega = \Big|\,(\ln(\omega))^2\,\Big|_{2\,\omega_0}^{\omega_g}$$

$$= (\ln\omega_g)^2 - (\ln(2\omega_0))^2$$

und

$$J_7 = 2\int\limits_{2\,\omega_g}^{\omega_g} \ln\left(1-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\frac{d\omega}{\omega}$$

$$= -2\int\limits_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \frac{d\omega}{\omega}\left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega_0^2}{2\omega^2} + \frac{\omega_0^3}{3\omega^3} + \frac{\omega_0^4}{4\omega^4} + \ldots\right)$$

$$= 2 \int_{2\,\omega_0}^{\omega_g} \left(\frac{\omega_0}{\omega^2} + \frac{\omega_0^2}{2\omega^3} + \frac{\omega_0^3}{3\omega^4} + \dots \right)$$

$$= 2 \left| \left(\frac{\omega_0}{\omega} + \frac{\omega_0^2}{2^2\,\omega^2} + \frac{\omega_0^3}{3^2\,\omega^3} + \dots \right) \right|_{2\,\omega_0}^{\omega_g}$$

$$= 2 \left(\frac{\omega_0}{\omega_g} + \frac{\omega_0^2}{4\,\omega_g^2} + \frac{\omega_0^3}{9\,\omega_g^3} + \dots \right)$$

$$- 2 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2^2\,2^2} + \frac{1}{3^2\,2^3} + \dots \right).$$

In der Grenze $\omega_0 \to 0$ bleibt für J_7 nur der 2. Summand stehen. Für diesen erhält man [1]):

$$-2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2\,2^n} = -\frac{\pi^2}{6} + (\ln 2)^2 \approx -1{,}164.$$

J''_3 berechnet sich zu:

$$J''_3 = -\int_{\omega_0}^{\omega_g} \frac{d\omega}{\omega} \cdot \int_{\omega_0}^{\omega^*} \frac{d\omega}{\omega}$$

$$= -(\ln \omega_g - \ln \omega_0)(\ln \omega^* - \ln \omega_0).$$

Faßt man nun zusammen, so erhält man $J'_1 + J'_2 + J'_3$, größenordnungsmäßig gleich $J'_1 + J''_2 + J''_3$,

$$\frac{1}{2!} [\ln \omega^* \ln \omega^* + \ln \omega_0 \ln \omega_0 - 2 \ln \omega^* \ln \omega_0$$

$$+ \ln \omega_g \ln \omega_g - \ln \omega_0 \ln \omega_0 - \ln 2 \ln 2 - 2 \ln 2 \ln \omega_0$$

$$- \frac{\pi^2}{6} + \ln 2 \ln 2 + 2 \ln \omega_0 \ln 2 + 2 \ln \omega_0 \ln \omega_0$$

$$- 2 \ln \omega_0 \ln \omega_g - 2 \ln \omega_g \ln \omega^* + 2 \ln \omega_g \ln \omega_0$$

$$+ 2 \ln \omega_0 \ln \omega^* - 2 \ln \omega_0 \ln \omega_0]$$

$$\frac{1}{2} \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_g} \right) - \frac{\pi^2}{12}$$

1) N. H. Abel, Oeuvres II, S. 190.

Aehnlich wie bei dem in α linearen Glied heben sich auch hier die Glieder, die ω_0 enthalten und die für $\omega_0 \to 0$ unendlich würden, gegenseitig weg, so daß für das Endresultat, in dem ω_0 gar nicht mehr vorkommt, jetzt ohne Schwierigkeit der Grenzübergang $\omega_0 \to 0$ gemacht werden kann.

Die obige Abschätzung des Gliedes mit α^2 genügt, da ja dieses Glied mit $(v/c)^4 \cdot \alpha^2$ multipliziert erscheint und da nach (7,6) $\ln \frac{\omega^*}{\omega_g} \approx = 2 \ln (c/v)$ ist.

4. Faßt man die bisherigen Ergebnisse zusammen, so erhält man:

$$(7,9) \qquad d\Phi_1 = \int_0^{E_g} d\Phi = \frac{Z^2 e^4 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{4 m^2 v^4 \sin^4 \vartheta/2} \left[1 + \right.$$

$$+ \alpha \beta^2 \cdot \frac{8}{3\pi} \left(\sin^2 \frac{\vartheta}{2} \cos^{-2} \vartheta/2 \left[2 \ln 2 \cos^2 \vartheta/2 \right.\right.$$

$$\left. + \cos\vartheta \ln (\sin \vartheta/2) - \frac{\sin\vartheta}{2} (\pi - \vartheta) \right] - \sin^2 \vartheta/2 \ln \frac{\omega^*}{\omega_g} \Big)$$

$$+ \alpha^2 \beta^4 \cdot \frac{3\,2}{9\pi^2} \left(\left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_g} \right)^2 \right) \sin^4 \vartheta/2 + \ldots \Big].$$

Hierbei ist das Glied mit $\beta^4 \alpha^2$ nur größenordnungsmäßig richtig. $d\Phi_1$ stellt den differentiellen Wirkungsquerschnitt dafür dar, daß ein Elektron nach dem Raumwinkelelement $\sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi$ – gleichgültig ob ein elastischer oder unelastischer Stoß beliebigen Energieverlustes vorliegt — gestreut wird. Berücksichtigt man noch, daß beim zweiten Glied $\ln \frac{\omega^*}{\omega_g}$ stark überwiegt, so kann man angenähert schreiben:

$$(7,9\,a) \qquad d\Phi_1 = \frac{Z^2 e^4 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{(2 m v^2)^2 \sin^4 \vartheta/2} \left[1 - \alpha \beta^2 \cdot 2 \cdot \frac{4}{3\pi} \sin^2 \vartheta/2 \ln \frac{\omega^*}{\omega_g} \right.$$

$$\left. + \alpha^2 \cdot \beta^4 \cdot 2 \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \left(\ln \frac{\omega^*}{\omega_g} \right)^2 \sin^4 \frac{\vartheta}{2} + \ldots \right]$$

Diskussion der Formel (7,9 a): Der Ausdruck (7,9 a) stellt nicht nur eine Entwicklung nach α dar, sondern auch eine solche nach β^2. Dieser Umstand erfordert es, die Formel (7,9 a) mit der relativistischen Rutherfordstreuformel, die ja ebenfalls nach Potenzen von β^2 fortschreitet, zu vergleichen. Die relativistische Rutherfordstreuformel ist auf wellenmechanischer Grundlage von Mott [1]), Sauter [2]) und Sommerfeld und Maue [3]) abgeleitet worden. Das übereinstimmende Ergebnis ist:

$$(7{,}10) \qquad d\Phi_{rel} = \frac{Z^2 e^4 \sin\vartheta \, d\vartheta \, d\varphi}{(2 m v^2)^2 \sin^4 \vartheta/_2} (1 - \beta^2 (1 + \sin^2 \vartheta/_2) + \beta^4 \ldots)$$

Wenn man die mit β^2 gehende Korrektion K_{rel}, die man der relativistischen Rechnung zufolge an der Rutherfordstreuformel (2,1) anbringt, vergleicht mit der mit β^2 gehenden Korrektion K_{Str}, die man machen muß, um die bei der Streuung mögliche Ausstrahlung zu berücksichtigen, so findet man für das Verhältnis K_{Str}/K_{rel} Werte in der Größenordnung von $\alpha = 1\,137$; für $\vartheta = \pi$ ist das Verhältnis K_{Str}/K_{rel} in seiner Abhängigkeit von β in Figur 4, S. 80 dargestellt.

Für $\beta \to 0$ geht nicht nur $K_{rel} \to 0$, sondern auch K_{Str}, da ja $x^2 \ln x \to 0$ für $x \to 0$. Den Verlauf von K_{Str} mit β für $\vartheta = \pi$ zeigt Figur 5 S. 80 dargestellt.

Da die Strahlungskorrektion im ganzen praktisch wirksamen Bereich noch etwa zwei Zehnerpotenzen kleiner ist als die relativistische Korrektion, spielt sie für die Deutung experimenteller Streuungsmessungen keine Rolle.

§ 8. Größenordnung von ω^*.

1. Es soll nun noch die Größenordnung von ω^*, das in den bisherigen Entwicklungen immer wieder benützt wurde, berechnet werden. Da ω^* die willkürliche Grenze des eigentlich bis ∞ reichenden Frequenzspektrums darstellt, muß es an sich möglichst groß gewählt werden. Bloch und Nordsieck zeigen

1) N. F. Mott, Proc. Roy. Soc. London (A) 124 (1929) 425.
2) S. Sauter, ZS. f. Phys. 86 (1933) 818.
3) A. Sommerfeld und A. W. Maue, Ann. d. Phys. 22 (1935) 629.

aber, daß ihre Methode eine gute Näherung nur darstellt, wenn ω^* zwei Ungleichungen genügt. Diese beiden Ungleichungen haben folgende Bedeutung:

a) Die kinetische elektromagnetische Selbstenergie des Elektrons soll klein sein gegenüber seiner kinetischen Energie.

b) Die Zustände negativer Energien sollen vernachlässigt werden.

zu a): Die erste Bedingung wird nach (5,8), wenn man dort im Nenner β gegen 1 vernachlässigt:

$$\frac{1}{2\hbar c}\sum_{s\lambda}\frac{(v, a_{s\lambda})^2}{k_s} \ll m_0 c^2, \tag{8,1}$$

dabei ist (vgl. (5,5)):

$$a_{s\lambda} = 2e\left(\frac{\pi\hbar}{G\,\omega_s}\right)^{1/2} e_{s\lambda}. \tag{8,2}$$

Setzt man (8,2) in (8,1) ein, so erhält man:

$$\frac{1}{2\hbar c}\sum_{s\lambda}\frac{(v, 2e\left(\frac{\pi\hbar}{G\,\omega_s}\right)^{1/2} e_{s\lambda})^2}{k_s} \tag{8,3}$$

$$= \frac{1}{2\hbar c}\sum_{s\lambda}\frac{4e^2\frac{\pi\hbar}{G\,\omega_s}(v, e_{s\lambda})^2}{k_s} \ll m_0 c^2.$$

Man führt zunächst die Summation über die Polarisationszustände aus und erhält (vgl. die Rechnung S. 35):

$$\sum_{\lambda=1}^{2}(v, e_{s\lambda})^2 = (v, e_{s1})^2 + (v, e_{s2})^2 \tag{8,4}$$

$$= v^2\cos^2\varepsilon_1 + v^2\cos^2\varepsilon_2$$

$$= v^2(1 - \cos^2\Theta) = v^2\sin^2\Theta$$

Gl. (8,4) in (8,3) eingesetzt, ergibt:

$$\frac{1}{2\hbar c}\sum_{s}\frac{4e^2\frac{\pi\hbar}{G\,\omega_s}v^2\sin^2\Theta}{\omega_s/c} \ll m_0 c^2. \tag{8,5}$$

Die Anzahl der Strahlungskomponenten im Frequenzintervall $d\omega_s$ und im Raumwinkelelement $\sin\Theta d\Theta d\chi$ beträgt:

$$\frac{G\ \omega_s^2\ d\omega_s}{(2\ \pi\ c)^3}\ \sin\Theta d\Theta d\chi \tag{8,6}$$

Mit (8,6) gewinnt man aus (8,5)

$$\frac{1}{2\ \hbar\ c}\ \frac{v^2}{c^2}\int \frac{4\ e^2\ \pi\ \hbar}{(2\ \pi)^3}\ \sin^3\Theta d\Theta d\chi \cdot d\omega_s \ll m_0 c^2.$$

Die Integration über den Winkel (s. S. 32) liefert:

$$\frac{v^2}{c^2}\ \frac{8\ \pi}{3}\ \frac{e^2}{(2\ \pi)^2 c}\int_0^{\omega^*} d\omega = \frac{v^2}{c^2}\ \frac{2}{3\ \pi}\ \frac{e^2\ \omega^*}{c} \ll m_0 c^2 \tag{8,7}$$

oder:

$$\hbar\ \omega^* \ll \frac{3\ \pi}{2}\ \frac{m_0\ c^2}{\alpha\ \beta^2} \tag{8,8}$$

oder in Zahlen:

$$\hbar\ \omega^* \ll \frac{640}{\beta^2}\ m_0 c^2 \tag{8,9}$$

zu b): Die Forderung der Vernachlässigung negativer Energien führt nach (5,9) auf:

$$\frac{e^2\ \omega^*}{m\ c^3}\left[f\ (v)\ \frac{\hbar\ \omega^*}{m\ c^2} + g\ (v)\ \frac{e^2\ \omega^*}{m\ c^3}\right] \ll 1. \tag{8,10}$$

Im vorliegenden nicht-relativistischen Fall ist dann, wie Bloch und Nordsieck ausführen:

$$f\ (v) \approx \frac{1}{3\ \pi}; \qquad \text{und} \qquad g\ (v) \approx \left(\frac{2}{3\ \pi}\right)\ \beta^2$$

d. h. die Bedingung (8,10) schreibt sich:

$$\frac{e^2\ \omega^*}{m\ c^3}\left[\frac{1}{3\ \pi}\ \frac{\omega^*\hbar}{m\ c^2}\left(1 + \frac{4}{3\ \pi}\ \alpha\ \beta^2\right)\right] \ll 1$$

Da sich $\alpha\beta^2$ gegen 1 vernachlässigen läßt, kann man auch schreiben:

$$\frac{e^2}{m c^3}\,\omega^* \left[\frac{1}{3\pi}\,\frac{\hbar\,\omega^*}{m c^2}\right] \ll 1 \tag{8,11}$$

oder:

$$\hbar\,\omega^* \ll \sqrt{\frac{3\pi}{\alpha}}\; m_0 c^2 \tag{8,12}$$

oder in Zahlen:

$$\hbar\,\omega^* \ll 36\, m_0 c^2. \tag{8,13}$$

Es ist ersichtlich, daß (8,13) einschneidender ist als (8,9) und daher allein berücksichtigt zu werden braucht. Das größenordnungsmäßig größte ω^*, das mit (8,13) verträglich ist, liefert den Ansatz

$$\hbar\,\omega^* \approx m_0 c^2. \tag{8,14}$$

Zusammenfassung.

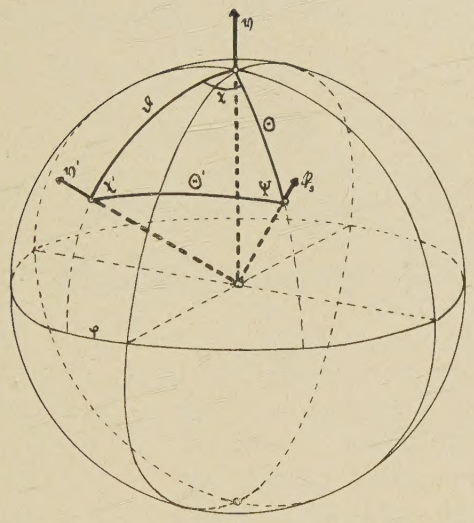
1. Die Streuformeln für ein Elektron unter Berücksichtigung der Ausstrahlung eines Lichtquants $\hbar\omega$, die nach zum Teil verschiedenen Methoden von Mott, Scherzer, Sauter, Bethe und Heitler berechnet wurden, werden miteinander verglichen. Es zeigt sich, daß sie alle auf dieselbe Form gebracht werden können. Gemeinsam ist ihnen, daß der Wirkungsquerschnitt nach ihnen proportional $\frac{d\omega}{\omega}$ ist, also für $\omega \to 0$ unendlich wird.

2. Dieses Unendlichwerden für $\omega \to 0$ tritt in der Streuformel, wie sie Bloch und Nordsieck angeben, nicht mehr auf. Die Verfasser zeigen, daß beim Stoß eines Elektrons nicht ein Lichtquant, sondern unendlich viele Lichtquanten ausgesandt werden, die bei $\omega = 0$ eine Häufungsstelle haben.

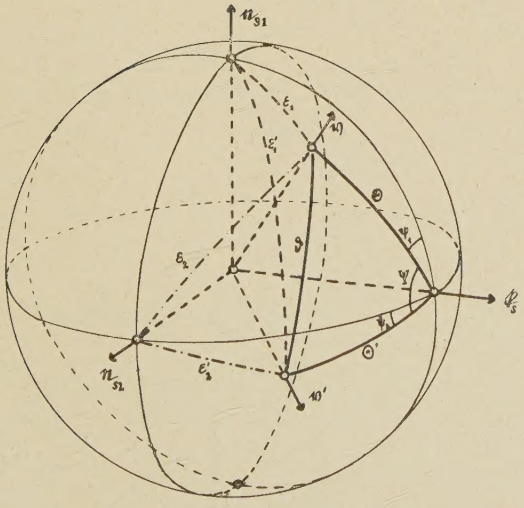
3. Die Streuformeln von Mott, Sauter und Bethe-Heitler ergeben sich aus der Bloch-Nordsieck'schen Formel als das lineare Glied einer Reihenentwicklung nach α.

4. Der differentielle Wirkungsquerschnitt für die Streuung eines Elektrons nach dem Raumwinkelelement $\sin\vartheta d\vartheta d\varphi$ wird mit Berücksichtigung der dabei möglichen Ausstrahlung berechnet.

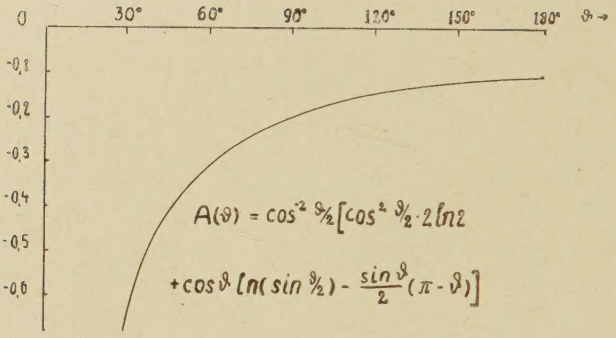
Zum Schluß ist es mir eine angenehme Pflicht, Herrn Professor Dr. W. Braunbek für die Ueberlassung dieses Themas und für seine wertvolle Hilfe und Förderung zu danken.



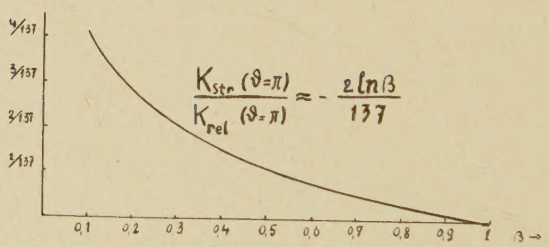
Figur 1.



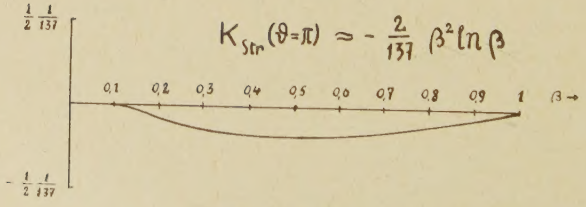
Figur 2.



Figur 3.



Figur 4.



Figur 5.

Lebenslauf

Ich bin geboren am 11. März 1914 in Ehingen a. D. als Sohn des Volksschulrektors Erhard Weinmann und seiner Frau Josefine geb. Berner. Nachdem mein Vater nach Wangen im Allgäu versetzt worden war, besuchte ich von 1920—1923 die Volksschule in Wangen im Allgäu und von 1923 an 5 Jahre lang die dortige Lateinschule. Ab 1928 war ich am Gymnasium in Ehingen a. D., wo ich im Frühjahr 1932 die Reifeprüfung ablegte. Ich studierte ab SS. 1932 Mathematik und Physik in München an der Universität, in Stuttgart an der Techn. Hochschule und ab SS. 1936 an der Universität Tübingen. An letzterer beschäftigte ich mich vor allem mit Theoretischer Physik und entschloß mich auch darin zu promovieren.

Edgar Weinmann.